Tal, resonemang och representationer

- en interventionsstudie i matematik i förskoleklass

Görel Sterner

Licentiatuppsats 2015

UNIVERSITY OF GOTHENBURG

INSTITUTIONEN FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

Denna licentiatuppsats har genomförts inom forskarutbildningsämnet Pedagogiskt arbete, inom ramen för forskarskolan i utbildningsvetenskap vid Centrum för utbildningsvetenskap och lärarforskning, (CUL), Göteborgs universitet.

Abstract

Titel: Tal, resonemang och representationer - en interventionsstudie i matematik i förskoleklass
Författare: Görel Sterner
Språk: Svenska med en engelsk sammanfattning
Nyckelord: Matematik, intervention, tal, resonemang, representationer

Förskolebarns matematiska kunskaper vid skolstarten har starka samband med senare skolframgångar i matematik i grundskolan. Förskoleklassen har en unik ställning i det svenska utbildningssystemet som bryggan mellan det informella lärande som oftast dominerar i förskolan, och det mer formella lärande som tar vid i skolan. Förskoleklassen är inte obligatorisk, men i praktiken deltar nästan alla sexåringar i denna verksamhet. I denna uppsats har två separata men integrerade empiriska studier genomförts. I Studie 1 utprövades ett program med strukturerad, explicit undervisning med fokus på tal och barns och lärares kollektiva resonemang om representationer. Utprövningen av programmet har skett i samverkan mellan forskare och verksamma förskoleklasslärare med iterativ metod i fyra faser. De fyra faserna ledde var och en till viss revidering och fördjupning av programmet. Ett övergripande resultat av utprövningen var att det pedagogiska programmet bibehöll betoningen på undervisningens strukturerade sekvenser av aktiviteter och dess kollektiva resonemang om representationer. Det innebar också att barns olika uppfattningar och sätt att uttrycka sig om aktiviteter och begrepp utgjorde en tillgång i diskussionen och ett bidrag till den samlade bilden av det aktuella begreppet. Med utgångspunkt i programmet som prövades ut i Studie I, genomfördes i Studie II en randomiserad matematisk intervention för barn i förskoleklass. I studien deltog tolv förskoleklasser. I ett första steg lottades de tolv klasserna slumpmässigt in i en interventionsgrupp eller en kontrollgrupp. I ett andra steg lottades barnen inom varje förskoleklass, så att alla barn deltog i undervisningen men bara hälften testades och deltog därmed i studien. Studiens övergripande syfte var att på gruppnivå studera effekter av interventionen i förskoleklass på barnens senare matematikkunskaper i årskurs 1. Resultaten visade en signifikant effekt av interventionen på matematik, till experimentgruppens fördel. Det fanns också en bestående effekt av interventionen nio månader senare då barnen gick i årskurs 1. De båda

studierna bidrar sammantaget till att demonstrera att strukturerad och explicit undervisning i förskoleklass med fokus på tal, resonemang och representationer har effekt på utvecklingen av barnens matematiska kunnande.

Licentiatuppsatsens disposition

Denna licentiatuppsats besår av fyra kapitel. Det första kapitlet innefattar en inledning med uppsatsen innehåll och syfte. I kapitel 2 presenteras teori och forskning som ligger till grund för design och utprövning av det matematiska pedagogiska program och den intervention i matematik som ingår i denna uppsats. Kapitlet avslutas med ett avsnitt om studiens teoretiska perspektiv på lärande och som utgör studiens ramverk. I kapitel 3 redogörs för vart och ett av de två delstudiernas syften, deras forskningsfrågor, metoder, resultat, analyser samt avslutande diskussioner. I kapitel 4 förs en övergripande diskussion om de båda studiernas resultat. Till sist finns en sammanfattning på engelska.

Innehåll

Förord

Ulrika och Ola nämner jag först i mitt förord. Med er hjälp, min huvudhandledare *Ulrika Wolff* och min biträdande handledare *Ola Helenius*, har jag förstått så mycket mer av olika dimensioner av forskning. Ett varmt tack till er båda!

Jag vill rikta ett hjärtlig tack till forskarskolan CUL, dess ledning, forskare och mina doktorandkollegor. Ett varmt tack till alla som har stöttat mig i arbetet med min licentiatuppsats. Ett särskilt tack till:

Bengt Johansson, tidigare föreståndare för Nationellt centrum för matematikutbildning (Ncm), som oförtrutet stöttat mig både i mitt arbete inom Ncm och i mina studier inom forskarskolan. *Peter Nyström,* föreståndare vid Ncm, och alla mina kollegor för det helhjärtade stöd som gjort det möjligt att fullfölja uppsatsarbetet.

Alla de *förskoleklasslärare* och deras klasser som medverkade i utprövningen av det matematiska pedagogiska programmet och *experimentgruppens* och *kontrollgruppens* förskoleklasslärare och deras klasser för genomförandet av den matematiska interventionen. *Berner Lindström* som tog sig tid att ge mig experthandledning just när sommaren stod för dörren. Medlemmarna i projektgruppen vid Ncm, som tillsammans med mig startade arbetet med förskoleklassens matematik: Framlidne *Ingvar Lundberg,* initialt projektets vetenskaplige ledare, *Ola Helenius* och *Karin Wallby*. *Gunnar Sjöberg* och *Helena Vennberg,* projektets samarbetspartner vid Umeå universitet. *Cecilia Kilhamn* för insiktsfull kritik och värdefulla kommentarer i samband med mitt planeringsseminarium. *LUM-gruppen* och *FLUM-gruppen* för inspirerande och lärorika seminarier och diskussioner. *Marie Grice* för värdefull hjälp med den språkliga bearbetningen av uppsatsens engelska sammanfattning. Gun-Britt Wärvik för professionell hjälp med allehanda frågor. *Elisabeth Rystedt,* min kollega, goda vän och reskamrat i både bildlig och fysisk bemärkelse, för god samvaro och för alla betydelsefulla diskussioner om stora och små ting. Min älskade *familj* för alla roliga, kritiska och inspirerande samtal.

Efter mer än tjugo års arbete med matematikutveckling har det varit ett lärorikt och inspirerande projekt av få genomföra de två studier som ingår i denna licentiatuppsats. I mitten av 1980-talet kom jag genom professor Ingvar Lundbergs forskning för första gången i kontakt med begreppet språklig medvetenhet. Det är den omfattande och goda forskningen inom detta område som har lett till att förskolan och förskoleklassen har tagit sig uppgiften att ge alla barn tillgång till det skrivna språkets värld. Det är min förhoppning att min licentiatuppsats på samma sätt blir ett led i att också sambandet mellan tidiga erfarenheter av att undersöka, använda och resonera om tal och den fortsatta kunskapsutvecklingen i matematik, blir lika väl beforskat och, som ett resultat av detta, också får genomslag i förskoleklassens dagliga verksamhet.

Skövde april 2015
Görel Sterner

Kapitel 1 Inledning

Barn utvecklar informellt kunnande i matematik långt innan de börjar skolan. Informell matematik innefattar till exempel idéer om storlek, form, mönster, position, läge, ökning, minskning, mer och mindre (Ginsburg, Sun Lee & Stevenson Boyd, 2008). Spontan lek och andra vardagssituationer ger barn värdefulla erfarenheter av att undersöka och engagera sig i informell matematik, men för att *matematisera*, det vill säga för att explicit tolka sina erfarenheter matematiskt, behöver de resonera om dessa med lärare och kamrater (Ginsburg et al., 2008). Matematik- och språkutveckling är tätt sammanvävda med varandra och karakteristiskt för barns sätt att uttrycka sig före den formella skolstarten, är att de ibland använder okonventionella och egenhändigt uppfunna strategier och symboler (Ginsburg, 1975). Ett kritiskt skede i barns matematikutbildning är just kopplingen mellan informell och formell matematik och mellan icke-symboliska och symboliska förmågor (Baroody, Eiland & Thompson, 2009a; Clements & Sarama, 2007; Ginsburg, 1975; Ginsburg et al., 2008; Jordan, 2007; Desoete, Ceuleman, De Weerdt & Pieters, 2012; Purpura, Baroody & Loonigan, 2013; Ramani & Siegler, 2008). Icke-symbolisk förmåga innebär en känsla för kvantitet som inte innefattar symboliska uttryck såsom räkneord eller vårt arabiska siffersystem.

Barn lär sig oftast det som vi ger dem möjlighet att lära sig och om vi vill att de ska lära sig visst specifikt innehåll, måste vi hjälpa dem att rikta sin uppmärksamhet mot just detta innehåll (Ahlberg, 1995; Björklund, 2008; Hiebert, 2003; Häggström, 2014). Möjlighet att lära bygger på vissa förutsättningar:

> Providing an opportunity to learn what is intended means providing the conditions in which students are likely to engage in tasks that involve the relevant content. Such engagement might include listening, talking, writing, reasoning, and a variety of other intellectual processes (Hiebert, 2003, s 10).

Utveckling av matematiskt tänkande sker genom barns interaktion med omgivningen och kulturens talsystem och med stöd av artefakter, det vill säga föremål eller symboler som människor har format för att tjäna vissa syften (Vygotsky, 1978). Inom sociokulturell teori är språkutveckling och begreppsutveckling processer som är beroende av varandra och utveckling inom det ena området underlättar utveckling inom det andra. Vygotsky (1978) betonade att det är undervisningen, interaktionen mellan lärare och barn, som skapar lärprocesser som leder till utveckling. En utmaning för undervisningen i förskoleklassen är att skapa matematik- och språkutvecklande arbetssätt. Syftet med sådana arbetssätt är att främja barns deltagande i samtal om matematik och att använda matematik som leder till begreppsutveckling, och att barns generella och matematiska ordförråd utvecklas. Betydelsen av kommunikativa arbetssätt betonas i ramverk baserade på kognitiv och matematikdidaktisk forskning (Cross, Woods & Schweingruber, 2009; Kilpatrick, Swafford & Findell; 2001; Niss, 2003). Enligt förskolans läroplan (Skolverket, 2010) och åtföljande förtydligande av läroplanen (Utbildningsdepartementet, 2010) ska undervisningen främja barns förmågor att undersöka problem och matematiska begrepp, samt att resonera och kommunicera idéer och tankar med olika representationer, i interaktion med lärare och kamrater. Liknande formuleringar om elevers utveckling av förmågor relaterade till matematik återfinns i grundskolans läroplan (Skolverket, 2011a).

Utbildningspolitiska mål för likvärdighet

Internationella studier indikerar att skillnader i barns informella kunnande i matematik då de börjar skolan ofta är relaterade till de erfarenheter de har av aktiviteter och lekar med matematiskt innehåll (Gersten, Jordan & Flojo, 2005; Melhuish et al., 2008) och att ett alltför begränsat matematiskt kunnande vid skolstarten tenderar att utvecklas till senare matematiksvårigheter i skolan (Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni, 2007; Morgan, Farcas & Wu, 2009). Svensk utbildningspolitik har uttalade likvärdighetsmål för elevers utbildning både i förskola och i grundskola. Alla elever, oavsett föräldrars utbildningsnivå, ska ges förutsättningar att utveckla kunnande i matematik och nå de mål som kommer till uttryck i kunskapskraven i grundskolans läroplan (Skolverket, 2011a). Den svenska nationella utvärderingen i matematik i årskurs tre 2013, visar ett starkt samband mellan provresultat och föräldrars utbildningsbakgrund (Skolverket, 2013). Av elever med föräldrar med högst grundskoleutbildning nådde cirka 45 procent kravnivån för samtliga sju delprov, medan motsvarande andel för elever med högskoleutbildade föräldrar var närmare 75 procent. Longitudinella studier i USA, England och Kanada har visat att matematiskt kunnande vid 4,5 års ålder predicerar prestationer i matematik i slutet av grundskolan efter kontroll för kognitiva förmågor, familjebakgrund och förmåga till uppmärksamhet. (Duncan et al., 2007). En nyligen publicerad studie (Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014) indikerar att just utvecklingen av matematiska förmågor som sker mellan cirka 4,5 och 7 års ålder i ännu högre grad predicerar matematiskt kunnande vid 15 års ålder.

Förskoleklassen - bryggan mellan informellt och formellt lärande

Det svenska utbildningssystemet har goda förutsättningar att främja kontinuitet i barns lärande. Av alla barn mellan 3 och 5 år är 95 procent inskrivna i förskolan. Förskolan har uttalade strävansmål i matematik uttryckta i förskolans läroplan (Skolverket, 2010). Sverige har också en välutbyggd förskoleklass där mellan 95 och 96 procent av alla barn mellan 6 och 7 år är inskrivna. Förskoleklassen har pedagogiska ambitioner uttryckta i den nationella läroplanen för grundskolan (Skolverket, 2011a), men innefattas inte i läroplanens kursplaner. Det finns alltså inget specifikt matematikinnehåll angivet för förskoleklassens undervisning i matematik. Däremot påpekar Skolverket (2011c) att de övergripande målen i del två av läroplanen som anger vad skolan ansvarar för att varje elev ska kunna efter genomgången grundskola, involverar även förskoleklassen. För grundskolan anges till exempel att: *Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet* (s 8). Skolverket (2011b) betonar att förskoleklassen har en särställning i det svenska utbildningssystemet som bryggan mellan det i huvudsak informella lärande som sker i förskolan och det mer formella lärande som tar vid i skolan.

Denna licentiatuppsats innefattar två delstudier med det övergripande syftet att designa och pröva ut ett matematiskt pedagogiskt program riktat till förskoleklassen, baserat på strukturerad, explicit undervisning och barns kollektiva resonemang om representationer av fenomen med matematisk relevans och att implementera och utvärdera effekten av en 10 veckors randomiserad kontrollerad intervention i förskoleklass, med utgångspunkt i ovan nämnda pedagogiska program. Med kollektiva resonemang avses både resonemang som byggs upp av enskilda men presenteras för och utmanas av gruppen, såväl som resonemang som konstrueras tillsammans i gruppen. Matematikinnehållets fokus i det pedagogiska programmet är utvecklingen av aspekter av tal och tals användning som forskning har definierat som kritiska för det utvidgade och fördjupade lärande som tar vid i skolan. Kollektiva resonemang om representationer som det huvudsakliga redskapet för lärande, har sin bakgrund i ett sociokulturellt perspektiv på språk och lärande som processer samverkande med varandra (Vygotsky, 1978). Språket är ett kulturell redskap för att utveckla och dela idéer mellan människor och samtidigt är det ett psykologiskt redskap för att strukturera det egna tänkandet. Matematiska begrepp är abstrakta. För att få tillgång till abstrakta begrepp och för att kunna kommunicera om och med hjälp av dem, måste begreppen representeras (Kilpatrick et al., 2001). Exempel på representationer som används i denna studie är handlingar, konkreta föremål, barnens teckningar med bilder, streck, prickar och andra ikoner samt ord, talrader och skriftliga symboler. Resonemang om representationer är i den här studien baserade på strukturerade matematiska aktiviteter, designade explicit för förskoleklassens undervisning i tal och räkning (Sterner, Helenius & Wallby, 2014).

Uppsatsens innehåll och syfte

Denna licentiatuppsats innehåller två delstudier:

Studie I. Number by reasoning and representations – the design and theory of an intervention program for preschool class in Sweden (Sterner & Helenius, 2015). Studiens övergripande syfte är att designa och pröva ut ett matematiskt pedagogiskt program med fokus på tal, resonemang och representationer, redovisad i uppsatsens första artikel.

Studie II. Reasoning about representations: effects of an early math intervention (Sterner, Wolff & Helenius, submitted). Det övergripande syftet är att implementera och utvärdera effekten av en tio veckors randomiserad kontrollerad matematisk intervention i förskoleklass, redovisad i uppsatsens andra artikel.

Den övergripande forskningsfrågan är i vilken mån strukturerade lekar och aktiviteter med fokus på resonemang om representationer kan leda till att barn i förskoleklass utvecklar sina föreställningar om tal, siffror, kvantiteter och enkla räkneoperationer.

Kapitel 2 Teori och tidigare forskning

I detta kapitel diskuteras inledningsvis teori och forskning om barns utveckling av taluppfattning som i huvudsak sker före den formella skolstarten, följt av ett avsnitt om interventionsstudier som avser att främja denna utveckling. Därefter diskuteras sambanden mellan språkliga förmågor, arbetsminne och lärande i matematik. De följande avsnitten beskriver matematikdidaktiska ramverk och en undervisningsmodell som också utgör en del av utgångspunkterna för det matematiska pedagogiska program som nämns ovan. Kapitlet avslutas med en beskrivning av teoretiska utgångspunkter och empirisk forskning som kan belysa aspekter av undervisningsprogrammet som ligger till grund för denna uppsats intervention i matematik i förskoleklass.

Studier om utvecklingen av taluppfattning i förskoleåldern och i tidiga skolår har traditionellt skett framför allt inom den psykologiska forskningen, ofta med utgångspunkt i Piagets omfattande arbeten (Clements & Sarama, 2007; Fuson, 2009; Kilpatrick et al., 2001). Idag spänner forskningen över flera vetenskapliga discipliner såsom matematik, matematikdidaktik, kognitiv psykologi, informationsprocesser och neurovetenskap (Kilpatrick, 1992; Sarama & Clements, 2009). Bruner (1966) har karakteriserat den psykologiska forskningen som tillbakablickande och beskrivande av utveckling och lärande, medan undervisningsteori betecknas som framåtblickande, vars intresse framför allt handlar om hur undervisningen kan bidra till att förbättra möjligheter till lärande. Ett ökat intresse för lärande som socialt och kulturellt situerat, och för undervisning och lärande som två sidor av samma mynt, parat med intresse för äldre elevers lärande bidrog till den matematikdidaktiska forskningens framväxt under 1980-talet och framåt (Carpenter, Dossey & Koehler, 2004). Intresse för elevers uppfattningar av matematiska begrepp, gruppdynamik, affektiva faktorers betydelse för lärande, och lärares pedagogiska matematiska kunnande, ledde också till att alternativa metoder till experimentella studier utvecklades. Uppfattningen att lärande sker i kulturella praktiker behöver dock inte stå i motsättning till ett perspektiv på lärande som är baserat på kognitiv forskning. Carpenter et al. (2004) pekar istället på att det kan vara en styrka i att förena de två perspektiven och på så sätt dra nytta av båda. Den psykologiska forskningen innefattar till exempel studier vars syfte är att undersöka och beskriva faktorer som kan utgöra både resurser och hinder för lärande, såsom olika sidor av arbetsminnet (Gathercole & Pickering, 2008; Geary, 2010; Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2013; Raghubar, Barnes & Hecht, 2010; Krajewskij & Schneider, 2009b; Rasmussen & Bisanz, 2005). En annan faktor med relevans för denna studie är sambandet mellan matematik och språkutveckling (Durham et al., 2007; Griffin, 2007; Moseley, 2005; Pruden, Levine & Huttenlocher, 2011; Wiese, 2003). Sambanden mellan arbetsminne, språkutveckling och matematik diskuteras i slutet av detta kapitel.

Number sense

I forskningslitteraturen om utvecklingen av kunskap om att förstå och använda tal används termen *number sense* på olika sätt. Inom den neurovetenskapliga forskningen beskriver number sense biologiskt baserade icke-verbala förmågor, relaterade till kvantitet (Dehaene, 1992; 2011/1997). Ursprungligen myntades begreppet av matematikern Tobias Dantzig (1954/2007):

> Man, even in the lower stages of development, possesses a faculty which, for want of a better name, I shall call Number Sense. This faculty permits him to recognize that something has changed in a small collection when, without his direct knowledge, an object has been removed from or added to the collection (p 1).

(2011/1997; 2001) har vidareutvecklat den del av teorin om number sense som beskrivs som en medfödd känsla för kvantitet som spädbarn och även vissa djurarter kan uppvisa. Denna icke-symboliska känsla för kvantitet innefattar enligt Dehaene två system: ett system för approximativ representation och jämförelse av större mängder, och ett system för precis representation av en till tre individuella objekt (subitisering). Dessa två system utgör tillsammans basen för utvecklingen av symbolisk förmåga, vilken är socialt och kulturellt medierad och baserad på människans unika förmåga att utveckla och använda symboliskt tänkande (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004).

Inom den psykologiska forskningen beskriver number sense vanligtvis utvecklingen av förmågor och färdigheter med fokus på kvantitet, tal, relationer och operationer med tal, som barn ofta lär sig före den formella skolstarten (Berch, 2005; Case & Okamoto, 1996; Dyson, Jordan & Glutting, 2011; Jordan, 2007). Parallellt med number sense förekommer många andra termer för att beskriva denna utveckling, till exempel *concepts of numbers and counting* (Fuson, 1988), *preparatory arithmetic skills* (Schopman et al., 1996), *number module* (Butterworth, 1999), *everyday mathematics* (Ginsburg et al., 2008), *numerical knowledge* (Siegler & Ramani, 2008) och *early numeracy* (Toll & Van Luit, 2012).

Den matematikdidaktiska forskningen definierar number sense i en vidare betydelse och inkluderar till exempel *tal i bråkform, tal i decimalform* (McIntosh, Reys & Reys, 1992) och *negativa tal* (Kilhamn, 2011). Number sense har beskrivits som en väl sammanlänkad väv av meningsfulla begrepp och förmågor och genom att knyta nya insikter till tidigare kunskaper, växer väven allt tätare och bredare (McIntosh et al., 1992). Berch (2005) beskriver forskningens syn i en övergripande syntes:

> Possessing number sense ostensibly permits one to achieve everything from understanding the meaning of numbers to developing strategies for solving complex math problems; from making simple magnitude comparisons to inventing procedures for conducting numerical operations; and from recognizing gross numerical errors to using quantitative methods for communicating, processing, and interpreting information. With respect to its origins, some consider number sense to be part of our genetic endowment, whereas others regard it as an acquired skill set that develop with experience (p. 333).

Number sense i denna mening innefattar alltså, förutom förståelse för tal, relationer och operationer med tal, även förmåga att använda tal och kvantitativa metoder som redskap för att kommunicera, processa och tolka information. En person med number sense förväntar sig dessutom att tal är användbara och att de har en viss regelbundenhet (McIntosh et al., 1992).

Den huvudsakliga skillnaden mellan forskares syn på number sense gäller enligt Berch huruvida vi har en medfödd känsla för kvantitet eller om utvecklingen av taluppfattning är helt baserad på erfarenhet.

Språkligt signalerar termen number sense rikare nyanser av begreppets innebörd än den svenska termen taluppfattning. *Sense* kan betyda att ha känsla för något och *making sense* att det är något som framstår klart för oss (Kilhamn, 2011). Våra sinnen, *our senses*, hjälper oss att tolka information från omgivningen och Radford (2014) talar om *sensous cognition,* vi lär oss med hjälp av våra sinnen. I föreliggande studie används number sense som en inkluderande beteckning för allt från den tidigaste biologiskt förankrade känslan för kvantitet, till den komplexa taluppfattning som kan fortsätta utvecklas även i vuxen ålder. Det råder alltså ingen konsensus om vad som är den exakta definitionen av number sense (Berch, 2005; Gersten et al., 2005) men den forskningsöversikt som genomförts i samband med föreliggande uppsats visar att flera kritiska områden är involverade:

1. *Räkning, räkneprinciper* (Aubrey, Dahl & Godfrey, 2006; Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Aunio & Niemvirta, 2010; Desoete et al., 2009; Geary, 2003; Gelman & Gallistel, 1978; Jordan, Kaplan, Oláh & Locuniak 2006; Jordan et al., 2007; Jordan, Glutting & Ramineni, 2010; Krajewskij & Schneider, 2009a; Navarro, et al., 2012; Nunes et al., 2007).

2. *Talkombinationer och talmönster* (Berch, 2005; Jordan et al., 2006; Jordan, 2007; Jung, Hartman, Smith & Wallace, 2013; Neuman, 1989; 2013).

3. *Icke-verbala och verbala ordproblem, addition och subtraktion* (Jordan et al., 2006; Jordan et al., 2007; Jordan & Levine, 2009; Jung et al., 2013; Gersten et al., 2005).

4. *Kunskap om tal, tallinjen* (Berch, 2005; Case & Okamoto, 1996; Griffin 2003; 2007; Link, et al., 2013; Praet & Desoete, 2014; Ramani & Siegler, 2008; Siegler & Booth, 2004).

5. Positionssystemet (Jordan et al., 2012; Kilpatrick et al., 2001; Sarama & Clements, 2009).

Räkning, räkneprinciper

Utvecklingen av räkneförmågor har beskrivits som beroende av både generella och specifika, numeriska förmågor (Aunio, 2006; Aunio et al., 2010; Kroesbergen, Van Luit & Aunio, 2012; Navarro et al., 2012). Generella numeriska förmågor är *jämförelse, klassificering, en-till-en-korrespondens* och *seriering* (Inhelder & Piaget, 1964/1999). Dessa förmågor innefattar känsla för numeriska innebörder och relationer som underlättar för barn att organisera och jämföra kvantiteter (Aunio, 2006). Genom att använda den egna kulturens räkneprinciper såsom kardinaltalsprincipen (det sist uppräknade räkneordet svarar på frågan *hur många?*), utvidgar barn sin kvantitativa förståelse och förmåga att använda tal på ett flexibelt sätt (Gelman & Gallistel, 1978; Baroody et al., 2009a). Det finns ett ömsesidigt samspel i utvecklingen av generella och specifika numeriska förmågor (Aunio & Niemvirta, 2010). Det är däremot inte givet att utvecklingen av generella numeriska förmågor alltid föregår de specifika numeriska förmågorna. Utvecklingen är beroende av barnens konceptuella och procedurella numeriska erfarenheter (Rittle-Johnsen & Siegler, 1998). *Flyt i räkning* handlar om med vilken lätthet och noggrannhet en räkneoperation kan genomföras (Jordan et al., 2007). Shrager & Siegler (1998) studerade utvecklingen av räkneförmåga bland förskolebarn och fann att de använder en stor variation av strategier, när de löser enkla räkneuppgifter av typen 3 + 8. En strategi är att först räkna upp 3 och sedan 8 föremål. Därefter räknas alla föremål. En annan strategi är att starta på 3 för att sedan *räkna på:* 4, 5, 6, och så vidare. En mer effektiv strategi är att starta på 8 och räkna på därifrån. Vissa barn räknar inte alls eftersom de hade lagrat kombinationen 3 + 8 som talfakta i långtidsminnet.

Svårigheter med tal och räkning bland skolelever är relaterade både till ineffektiva räknestrategier och hur eleverna uppfattar vad det innebär att lösa aritmetiska uppgifter. Geary, Hamson & Hoard, (2000) fann att en del barn i årskurs 1 och 2 tenderade att uppfatta uppräkning som en mekanisk aktivitet, som till exempel bara kan utföras från vänster till höger. En del elever väljer fortfarande på högstadiet att lösa uppgifter genom att räkna på fingrarna både inom små och stora talområden (Geary, 1991; Grey & Tall, 1994; Ostad, 1999, 2002; Ostad & Sorensen, 2007). En viktig uppgift redan för den tidiga undervisningen är att främja utvecklingen av number sense. Genom kollektiva resonemang om tal och genom att använda tal i olika sammanhang, kan barn upptäcka att varje tal har en unik efterföljare, att tal har både kardinal och ordinal innebörd och att tal handlar om relationer och samband (Jordan et al., 2007). De kan lära sig att räkna både uppåt och nedåt på räknesekvenser och att använda andra sätt att strukturera räknandet, till exempel i femsteg och tiosteg (Mulligan, 2011). Genom att lära sig namnen på tiotalen och hur räkneorden kan kombineras kan de skapa större tal (Jordan & Levine, 2009). En kritisk aspekt av räkneförmåga är förståelse för sambandet mellan kvantitet, räkneord och matematiska symboler (Aunio & Räsänen, 2015; Clements, Sarama, Wolfe & Spitler, 2013; Jordan et al., 2007; Purpura et al., 2013).

Talkombinationer, talmönster

En kritisk aspekt av number sense, relaterad till flyt i räkning, är förtrogenhet med talkombinationer. De hela talen kan delas upp i mindre delar (som 7 + 0, 6 + 1, 5 + 2) och sedan återskapas till den ursprungliga helheten (Gersten et al., 2005; Jordan & Levine, 2009; Jung et al., 2013). Förmågan att perceptuellt uppfatta små antal utan att räkna (subitisering) kan vidareutvecklas till konceptuell subitisering. (Jung et al., 2013; Sarama & Clements, 2009). Två femmor på en tärning kan direkt uppfattas som tio och genom att rytmiskt säga räkneorden *sju, åtta, nio, tio,* kan barnet uppfatta det uppräknade antalet som fyra. Förmågan att använda konceptuell subitisering hjälper barn att utveckla förståelse för tals helhet-del-del-relationer och att använda effektiva räknestrategier. Om barn har kunskap om några talkombinationer som att 5 + 5 = 10 kan de snabbt avgöra att 6 + 5 = 5 + 5 + 1 = 11. Undersökande aktiviteter och resonemang om relationer inom tal och mellan tal bidrar till utvecklingen av konceptuell förståelse för tals egenskaper såsom kommutativitet (3 + 7 = 7 + 3) och associativitet (1 + 5 + 9 = 9 + 1 + 5), vilket underlättar flyt i räkning och förståelse för positionssystemet (Gersten, et al., 2005). Kunskap om tals helhet och delar är relaterad till förmågan att lösa ordproblem och till addition och subtraktion, förmågor som är nyckelaspekter av de tidiga årens skolmatematik (Jordan, Hanich & Kaplan, 2003; Levine, Jordan & Huttenlocher, 1992; Locuniak & Jordan, 2008).

Icke-verbala och verbala ordproblem

Kunskap om talkombinationer är relaterad till förmågan att lösa ordproblem av typen: *Leo har 5 kronor och får 3 kronor till. Hur många kronor har han nu?* Ordproblem används som ett sätt att skapa samband mellan tal, räkning och omvärld och förekommer i tre former: icke-verbala (barnen löser uppgiften med hjälp av konkreta föremål), verbala (problemet är inbäddat i en muntlig kontext) och symbolisk (hur mycket är 3 + 2?). Det är enklast för förskolebarn att lösa icke-verbala ordproblem med stöd av konkreta föremål (Dyson et al., 2011; Jordan et al., 2003; Jordan & Levine, 2009). Svårigheter att lösa verbala ordproblem kan tyda på begränsad erfarenhet av denna typ av aktivitet och begränsad kompetens inom addition och subtraktion. En annan orsak kan vara att en del barn har problem med ordförråd och den syntaktiska strukturen (Jordan & Levine, 2009). Ytterligare en förklaring är att förskolebarn kan ha svårt att få tillgång till mentala representationer av kvantiteter när fysiska objekt inte tillhandahålls (Levine et al, 1992; Gersten et al., 2005). Det kan i sin tur vara relaterat till arbetsminnets begränsade kapacitet (Geary et al., 2007; Geary, 2011; Krajewskij & Schneider, 2009b; Kyttälä, Aunio & Hautamäki, 2010). Men det är viktigt att notera, att även om både språkliga förmågor och arbetsminnet är resurser som stödjer matematiskt arbete, så beror barns förtrogenhet med talkombinationer primärt på utvecklingen av number sense (Jordan, 2007).

Kunskap om tal, tallinjen och positionssystemet

Ett perspektiv på utvecklingen av number sense har sin bakgrund i Case och Okamotos (1996) teori om *den centrala konceptuella strukturen,* baserad på neo-Piagetiansk teori. Den centrala konceptuella strukturen beskrivs som ett ramverk som underlättar för barn att tänka på många olika aspekter inom ett specifikt område, till exempel tal och tals användning, på liknande sätt. Case och Okamoto (1996) anger tre konceptuella strukturer som särskilt betydelsefulla för förskolebarn och barn i tidiga skolår: en struktur för *berättelser*, en för *rummet* och en för *tal*. *Den konceptuella strukturen för positiva heltal,* som är särskilt intressant för denna uppsats, innefattar *global uppfattning av kvantitet* och *initial räkneförmåga*. Global uppfattning av kvantitet möjliggör jämförelse av begrepp såsom *mer och mindre, längre och kortare*, *tyngre och lättare*. Den initiala räkneförmågan hjälper barn att göra uppräkningar och att svara på frågan *hur många?* Global uppfattning och räkneförmåga förefaller att utvecklas parallellt under tidiga förskoleår, utan en väl etablerad koppling däremellan. Efter hand som barnen lär sig att symboler och operationella tecken representerar tal och operationer med tal, integrerar de den globala uppfattningen av mängd och räkneförmåga till en större struktur, en mental tallinje, som ger barn ett nytt redskap för matematiskt tänkande (Case & Okamoto, 1996; Okamoto & Case, 1996; Siegler & Booth, 2004). Hypotesen om denna konceptuella struktur innebär att barn kan organisera sitt tänkande om tal i form av en linje med de positiva heltalen ordnade från vänster till höger, relaterade till begrepp som *större än, mindre än* och *nästa*. Mentala tallinjen är alltså en konstruktion som vi antas kunna utnyttja för att till exempel jämföra tals relativa storlek, göra rimliga uppskattningar, bedöma vem av två barn som är äldst, använda effektiva räknestrategier och underlättar förståelse för och användning av positionssystemet (Siegler, Fazio och Pyke, 2011). Positionssystemets idéer om platsvärde och gruppering är relaterade till alla de matematiska aspekter som beskrivs ovan. I förskoleklassen kan barnen få erfarenheter av att undersöka och resonera om hur vi kan gruppera ental till tiotal och tiotal till hundratal genom att bygga ihop klossar till tiotal och bygga tiotal till hundratal. Dessa undersökningar kan kopplas ihop med undersökande aktiviteter med talraden där fokus både på tiosekvenser och hur till exempel talen mellan 11 - 19 är grupperade i 10 + 1, 10 + 2 etcetera, och hur de är relaterade till platsvärde. En hypotes är att förståelse för ordningsföljden mellan tal och tals kritiska positioner på tallinjen i ental, tiotal, hundratal etcetera, vilka alltså har sin markering i det arabiska siffersystemet, bidrar till orientering i den inre värld där aritmetiskt tänkande kan äga rum (van Aster, 2000).

Forskning har visat att utvecklingen av number sense före skolstarten är kritisk för den fortsatta utvecklingen av mer komplext matematiskt kunnande (Gersten et al., 2005; Jordan et al., 2010; Krajewskilj & Schneider, 2009a; 2009b). Förskolan, förskoleklassen och skolan har därför det gemensamma uppdraget att ge barn och elever bästa möjligheter att utveckla number sense. För att vidareutveckla kunskap om och förståelse för vilket matematiskt innehåll som är relevant för förskoleklassens undervisning i matematik och vilka pedagogiska insatser som är mest effektiva, behövs interventioner. I det följande avsnittet presenteras några av de tidigare interventioner som har haft betydelse för och inspirerat denna studies utformning.

Interventionsstudier

Vilka aspekter av number sense som är i fokus i olika interventionsstudier varierar i hög grad. En del studier fokuserar på enskilda aspekter av tal och tals användning, andra innefattar program för undervisning som spänner över flera åldersgrupper. Innehållet i de interventioner som diskuteras i detta avsnitt har i olika omfattning bidragit till valet av det matematiska innehåll och till de principer för undervisningen som denna studies matematiska pedagogiska program är baserat på.

En anledning till forskares ökade intresse för interventioner i matematik före den formella skolstarten är att man genom tidiga insatser vill förebygga att senare svårigheter uppstår, och på så sätt minska skillnader mellan låg- och högpresterande elever i skolan (Sarama & Clements, 2009; Mononen, Aunio, Koponen & Aro, 2014). Ett ytterligare skäl är att tidigt ge barn positiva och rika erfarenheter av matematik (Björklund, 2008; Clements & Sarama, 2007; Doverborg & Pramling Samuelsson, 2000; Sarama & Clements, 2009). En litteraturöversikt av interventioner i matematik före den formella skolstarten visar att få studier har explicit fokus på sexåringar och att behovet att interventioner är stort:

> To meet the standards of high-quality intervention studies, researchers should place more emphasis on conducting randomized large-scale studies with different types of control groups, with adequate duration, and preferably, with standardized measures. Delayed follow-up measurements should be applied, as they are important in providing evidence about longer-lasting intervention effects. The longer the effect remains, the more effective the intervention can be at preventing mathematics difficulties. No interventions were found for seven-year-olds, and only four were available for 6-year-olds, although the age is crucial in mathematics learning. More intervention research to meet the needs of this age group is needed in the future to provide teachers with evidence-based practices to promote the learning of low-performing children successfully (Mononen et al., 2014, p 40).

De flesta studier är gjorda bland yngre barn eller skolelever. Det kan ha sin förklaring i att många studier är genomförda i länder där barn börjar skolan tidigare än i Sverige.

Två exempel på interventioner som har utvärderats vetenskapligt med positiva resultat är Griffin (2003; 2007) och Clements & Sarama (2007; Cements et al., 2011; Clements, Sarama, Wolfe & Spitler, 2013). Griffins studier är baserade på teorin om den konceptuella strukturen för positiva heltal som beskrivs ovan. Det övergripande syftet med interventionen var att främja utvecklingen av barns globala uppfattning av mängd och initiala räkneförmåga och att dessa två strukturer integreras med varandra. Programmet bygger på fem övergripande principer för undervisning (Griffin, 2007, författarens översättning).

1. Starta undervisningen i den verkliga världen och introducera nya matematiska begrepp med hjälp av verkliga objekt som finns i barnens vardag.
2. Ge barnen rika möjligheter att utveckla sitt muntliga språk och sin resonemangsförmåga.
3. Introducera den matematiska symbolvärlden gradvis och systematiskt.
4. Utgå från barnens förståelse och låt undervisningen följa en naturlig begreppsutveckling med hänsyn till progressionen och komplexiteten i begreppsutvecklingen som visat sig i den empiriska forskningen.
5. Låt barnen använda räknestrategier som är naturliga för dem men exponera dem även för andra strategier (ss. 380 - 386, författarens översättning).

Programmet som är avsett för undervisning i åldrarna fyra till åtta år innehåller en rik uppsättning av aktiviteter med fokus på kvantitet, räkning och formella symboler. Aktiviteterna som oftast består av olika spel avser att ge barn många möjligheter att skapa nätverk av relationer mellan dessa tre aspekter av tal och räkning. Barnen arbetar i små grupper med olika typer av spel som bygger på samarbete, diskussioner och användning av olika representationer. Idén bakom principerna i Griffins undervisningsprogram är bland annat att barnen ska integrera sina intuitiva och omedvetna föreställningar om kvantiteter med medvetna och explicita föreställningar om tal, och att detta kan ske genom en stark betoning på kollektiv kommunikation och lärande. De principer som anges ovan har funnits med bland utgångspunkterna för utformningen av det matematiska pedagogiska programmet i föreliggande studie. Griffin (2007) genomförde baserat på detta program en treårig interventionsstudie i förskoleklass till och med årskurs 2. 180 barn fördelade på experimentgrupp, kontrollgrupp och en normgrupp. Resultaten visade att experimentgruppen och kontrollgruppen med barn från socioekonomiskt utsatta områden, initialt presterade på en utvecklingsnivå som var 1,5 - 2 år lägre än normgruppens barn som kom från ett socioekonomiskt mer välbärgat område (Griffin, 2007). Experimentgruppen arbetade under treårsperioden med nämnda program, medan övriga grupper följde andra tillgängliga undervisningsprogram. I årskurs 2 presterade experimentgruppen på samma nivå och i absoluta tal högre än normgruppen, medan skillnaden mellan kontrollgruppen och de övriga grupperna fortfarande var lika stor. Resultatet visar att vetenskapligt baserade pedagogiska insatser kan bidra till att minska gapet mellan låg- och högpresterande elever. Undervisningen genomfördes av barnens lärare. En utgångspunkt för denna intervention är att om barn ska utveckla number sense så måste också lärare uppfatta matematik som ett nätverk av konceptuella relationer (Griffin, 2004) varför en betydelsefull komponent i interventionen var att medverkande lärare fick omfattande stöd och kompetensutveckling av forskarna.

Clements & Sarama (2007) utvecklade ett omfattande program med fokus på tal och geometri avsett för undervisning av barn cirka fyra till fem år gamla. Programmet har utvärderats i en longitudinell, randomiserad interventionsstudie som involverade 1375 barn, fördelade på två experimentgrupper och en kontrollgrupp (se Clement et al., 2011; Clements et al., 2013). Undervisningen genomfördes i helklass, i smågrupper och individuellt. Programmet följer en hypotetisk lärandebana (hypothetical learning trajectory) det vill säga aktiviteter bygger på varandra i en hierarkisk ordning och undervisningen sker stegvis. Lärandebanor innefattar enligt Simon (1995) och Clements et al. (2011) tre komponenter:

1. Lärandemålen som definierar riktningen för undervisningen.
2. De hypotetiska lärandebanorna, det vill säga en förutsägelse av hur elevernas tänkande och förståelse kommer att utvecklas i riktning mot lärandemål.
3. Undervisningsaktiviteterna som är designade att ta eleverna genom de olika stegen i de hypotetiska lärandebanorna.

Studien pågick under tre år. Under det första året genomfördes en pilotstudie. Under det andra året genomfördes interventioner i två experimentgrupper. Interventionerna i experimentgrupperna var identiska. En av experimentgrupperna erhöll utöver detta uppföljande intervention året före skolstart i årskurs 1 (Clements et al., 2013). Interventionen hade alltså inte bara ett omfattande innehåll utan varade också under lång tid. Över huvud taget ingick komponenter som medförde att barnen fick tillgång till kvalificerad undervisning under lång tid. Kompetensutveckling av medverkande lärare var en betydelsefull komponent i hela studien. Läraren uppmuntrades att dagligen interagera med barnen och att stödja problemlösning, kommunikation och resonemang om matematiska begrepp och deras samband.

Fördelen med att med stöd av kompetensutveckling låta barnens egna lärare genomföra interventionen är dels att de oftast har god kännedom om barnens kognitiva och emotionella förutsättningar, deras intressen och vad som engagerar dem, vilket kan underlätta samspelet mellan barn och vuxna och mellan barn. Genom kompetensutveckling och genom att undervisa kan man anta att lärare utvecklar kunnande som i sin tur bidrar till en förbättrad undervisning. En ytterligare fördel är att lärare träffar barnen kontinuerligt i olika sociala kontexter där det finns anledning att använda matematik. Experimentgruppernas resultat på posttestet var signifikant högre än kontrollgruppens resultat. På uppföljningstestet i årskurs 1 var experimentgruppernas resultat signifikant högre än kontrollgruppens resultat. Den experimentgrupp som erhöll ytterligare intervention hade dessutom signifikant högre resultat än experimentgruppen som inte erhöll uppföljande intervention, vilket tydligt indikerar vikten av kontinuitet.

En skillnad mellan Griffins och Clements och Saramas interventioner, är Griffins starka förankring i teorin om den konceptuella strukturen för tal där olika aspekter av förståelse av tal utvecklas parallellt, medan Clements och Saramas upplägg karakteriseras av en i högre grad linjär syn på utvecklingen av number sense. Det finns dock också många likheter. Båda använder en blandning av undervisningsmetoder. Båda är baserade på genomtänkta sekvenser av aktiviteter och både ser kompetensutveckling och stöd till lärare att förstå, bedöma och handla med utgångspunkt i dessa aktiviteter, som väsentliga (Clements & Sarama, 2007). Trots att båda dessa studier har visat valida resultat är en invändning som Siegler, Fazio och Pyke (2011) för fram, att denna typ av omfattande interventioner är svåra att genomföra på bred front då de är väldigt kostsamma. Istället argumenterar de för att även enklare typer av interventioner kan ha avgörande effekt. Ett exempel på en sådan är Siegler & Ramanis studie (2008) som tar sin utgångspunkt i forskning om sambanden mellan barns kunskap om tals relativa storlek och utvecklingen av number sense vilket anknyter till teorin om den konceptuella strukturen för tal. De genomförde en randomiserad studie bland 124 femåringar. Barnen i experimentgruppen spelade ett brädspel med kvadrater med siffrorna 1 - 10, placerade på en linje. Barnen spelade tillsammans med en vuxen, tjugo gånger under en tvåveckorsperiod. Kontrollgruppens barn spelade ett liknande spel, men utan siffror och med fokus på färger. Posttestet visade signifikanta skillnader till experimentgruppens fördel på fem matematiska uppgifter: *jämförelse av tals relativa storlek*, *uppskattning av tal på tallinjen*, *räkning*, *enkla additions- och subtraktionsproblem* och *igenkänning av siffror*. Uppföljande test två månader senare visade att effekten bestod.

Ett annat perspektiv i interventionsforskningen handlar om förmågan att rikta uppmärksamheten mot matematiska mönster och strukturer som kritiska aspekter av orsaker till matematiksvårigheter (Mulligan, 2011; Mulligan & Mitchelmore, 2009; Papic, 2007; Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011). Förståelse för den underliggande strukturen av ett matematiskt begrepp underlättar både för barn i förskoleåldern och äldre elever att uppfatta strukturer i andra begrepp och att generalisera begrepp. Mulligan (2011) definierar ett matematiskt mönster som en förutsägbar regelbundenhet som till exempel innefattar numeriska eller logiska relationer, där det enklaste mönstret är på formen ABAB. Ett annat exempel på mönster är sekvensen av kvadrattalen 0, 1, 4, 9, 16 och så vidare. Talen ökar med 1, 3, 5, 7, det vill säga med en sekvens av de udda talen. Det sätt som mönstret är organiserat på definieras som dess struktur. Exempel på ett enkelt mönster är strukturen i "stegräkning" såsom 2, 4, 6…, 5, 10, 15…, 10, 20, 30… (Mulligan, 2011). Med utgångspunkt i undervisning om repetitiva och spatiala mönster som innefattade form, storlek, rumslig orientering samt spatiala och numeriska strukturer genomförde Papic et al., (2011) en icke-randomiserad intervention bland barn som var cirka 4 till 5 år gamla. Samplet var relativt litet, 26 barn i experimentgruppen och 27 barn i kontrollgruppen. Bortfallet var dessutom stort. Studien pågick under 18 veckor med en kombination av tid för gruppundervisning och individuell undervisning. Kontrollgruppen arbetade med ordinarie innehåll i undervisningen utan specifikt fokus på mönster och strukturer. Undervisningen genomfördes av barnens ordinarie lärare och en forskare medverkade under en viss period i klassrummet för att stötta lärarens undervisning. Barnens utveckling följdes noggrant och uppgifterna anpassades och gavs individuellt eller i smågrupper, baserat på enskilda barns kunskapsnivå. Posttestet och uppföljningstestet som gavs ett år efter interventionen visade avsevärda skillnader mellan experimentgruppen och kontrollgruppen till experimentgruppens fördel, på uppgifter med repetitiva och dynamiska mönster. Ett centralt administrerat test på number sense som gavs ungefär samtidigt som studiens uppföljningstest, visade att 12 månader efter interventionen var experimentgruppens resultat på test i tal och räkning avsevärt mycket högre än kontrollgruppens resultat. Resultaten visar således att redan fyra-femåringar är mottagliga för aktiviteter som syftar till att upptäcka matematiska samband och logiska relationer.

En ytterligare något annorlunda utgångspunkt för interventionsprogram har använts av Clarke, et al. (2011). De har tagit fasta på resultaten av en metaanalys (Gersten et al., 2009) som visar betydelsen av explicit, strukturerad undervisning för elever som är i riskzonen för att utveckla svårigheter i matematik eller som redan kämpar med matematik. De genomförde en omfattande randomiserad intervention med fokus på hela tal, geometri, mätning och vokabulär. Studien, som var riktad till barn cirka 5,5 år gamla, involverade 1349 barn. Kontrollgruppen erhöll ordinarie undervisning. Interventionen var baserad på explicit undervisning enligt modellen från konkreta-till-representativa-till-abstrakta (CRA) undervisningsaktiviteter (Witzel, Mercer & Miller, 2003), som kan ses som en form av lärandebanor. Explicit undervisning innefattar enligt Clarke et al. att läraren visar modeller för problemlösning, tänker högt under problemlösningsprocessen samt gör begrepp och processer tydliga. Eleverna följer sedan lärarens modell, löser liknande problem och förklarar sina lösningar och sin förståelse för underliggande begrepp. Läraren ger omedelbar återkoppling på elevernas lösningar och förklaringar. Karakteristiskt för CRA-modellen är användningen av konkret material, visuella representationer och abstrakta symboler. Resultaten av Clarke et al.'s studie visar att det fanns en interaktionseffekt i den meningen att barn i experimentgruppen som på pretestet hade de lägsta resultaten, gjorde signifikant större framsteg än kontrollgruppens lägst presterande barn, medan högpresterande barn inom experimentgruppen inte gjorde signifikant större framsteg än högpresterande barn inom kontrollgruppen. Den metaanalys som Clarke et al. refererar till har undersökt effektiva undervisningsmetoder med fokus på elever som bedöms vara i riskzonen för att utveckla svårigheter i matematik.

Erfarenheter av resonemang inom den egna kulturens talsystem i meningsfulla sammanhang, är enligt en del forskare (Nunes, et al., 2007; Nunes, Bryant, Barros & Sylva, 2011) grunden för utvecklingen av number sense. Relativt få studier har explicit fokus på resonemang och matematik (Sophian, 2004) men nedan ges ett par exempel på några studier med sådant innehåll.

Nunes et al. (2007) genomförde en longitudinell interventionsstudie bland sexåringar med fokus på tal och resonemang om logiska relationer. En logisk relation beskrivs till exempel som det inversa sambandet mellan addition och subtraktion som att a + b - b = a, eller additiv komposition som innebär att alla tal kan uttryckas som summan av två andra tal, till exempel 5 = 4 + 1; 3 + 2 etcetera. Utvärderingen av denna studie visade att experimentgruppen gjorde signifikant större framsteg än kontrollgruppen på posttest och på uppföljningstest på logiska relationer, samt på ett standardiserat nationellt aritmetiktest som gavs 13 månader efter att interventionen hade avslutats. Resultaten visar alltså att barnen dels utvecklade förmåga att resonera matematiskt logiskt och dels att detta ledde till förbättrat kunnande i aritmetik. Även Aunio, Hautamäki och Van Luit (2005) genomförde en randomiserad intervention med fokus på kollektivt samarbete och resonemang. Undervisningen var baserad på två pedagogiska program som har sina teoretiska utgångspunkter i Piagets teorier om kognitiv utveckling (Piaget, 2001/1926) och Vygotskys teori om den proximala utvecklingszonen (Vygotsky, 1978). Barnens genomsnittliga ålder var 5,5 år. Syftet med undervisningen var att barnen skulle utveckla förmåga att komma med förslag till lösningar på problem, kommentera kamraternas förslag, ställa frågor samt förklara och motivera sina idéer. Två viktiga komponenter i undervisningsmodellen var användningen av kognitiva konflikter och betoning på utvecklingen av metakognitiva förmågor. Kognitiva konflikter kan uppstå när barnen möter information och utsagor som är förbryllande eftersom de strider mot den egna uppfattningen (Adey, Robertson & Venville, 2001). Metakognitiva förmågor innefattar att vara medveten om sitt eget tänkande och om sin egen aktiva roll i lärprocesserna. De matematiska aktiviteterna som ingick speglade både generella numeriska förmågor såsom klassificering och seriering, och specifika numeriska förmågor till exempel kardinaltalsprincipen och enkel addition, samt resonemang om orsak och verkan. Posttestet på number sense visade signifikanta skillnader mellan experimentgrupp och kontrollgrupp till experimentgruppens fördel, men dessa skillnader kvarstod inte vid uppföljningstestet sex månader senare, då båda grupperna presterade lika bra.

I både Nunes et al. (2007) och Aunio et al. (2005) var det, till skillnad från Griffin (2007) och Clements och Sarama (2007), forskare som ledde undervisningen, vilken genomfördes utanför klassrummet med små grupper av barn. Det innebar att barnens lärare inte var direkt involverade i undervisningssituationen eller i barnens lärprocesser. Aunio et al. föreslår att för vidare forskning vore det värdefullt att ge lärarna kompetensutveckling och låta dem leda undervisningen. När lärare har ämnesdidaktiska kunskaper i matematik och är involverade i barnens lärprocesser, finns det större möjligheter att utmana och följa upp barns tankar och idéer under dagen. Kompetensutveckling är betydelsefull eftersom lärares kunskaper om barns matematiska utveckling under förskoleåren och om undervisning i matematik har positiva samband med barnens framsteg (Sarama & Clements, 2009).

Språkliga förmågor och arbetsminne

Tidigare studier visar att barns matematiska förmågor vid skolstarten predicerar senare prestationer i matematik (Aunola, Leskinen & Nurmi, 2006; Duncan et al., 2007; Jordan et al., 2007; Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014). Även språkliga förmågor (Durham et al., 2007; Klibanoff et al., 2006; Moseley, 2005; Pruden, Levine och Huttenlocher, 2011; Wiese, 2003) och arbetsminne (Raghubar et al., 2010) är betydelsefulla faktorer relaterade till lärande i matematik I detta avsnitt redovisas några studier som kan belysa relationen mellan språkutveckling och matematik och mellan arbetsminne och matematik.

Språk och matematik

Social interaktion mellan barn och vuxna och användningen av matematiska ord och termer hjälper barn att skapa sammanhang mellan tal, ord och matematiska idéer (Cross et al., 2009). I en studie genomförd i USA med 140 barn som var knappt 5 år gamla, undersöktes om förskollärares användning av matematiska ord och begrepp hade samband med barnens utveckling av number sense (Klibanoff et al., 2006). Barn och lärare videofilmades i samband med den dagliga samlingen som innefattade planerad undervisning, gemensamma diskussioner, sång etcetera. Antal matematiska ord som förskollärarna använde varierade från 1 till 104. Det fanns ett starkt samband mellan frekvens av ord och mångfald av begrepp, det vill säga att förskollärare som använde många matematiska ord, använde också en större variation av begrepp. Omfattningen av förskollärarnas användning av matematiska ord hade signifikant samband med barnens utveckling av olika aspekter av number sense, såsom räkneförmåga, kardinalitet, ekvivalens, sifferkännedom, storleksordning samt enkel addition och subtraktion. Analysen av studiens resultat säger ingenting om på vilka sätt och i vilken utsträckning som barnen deltog i kommunikationen. I studien framkom inte om variationen i begrepp och frekvens av ord som förskollärna använde, hade samband med frekvens och typ av ord som barnen använde.

Pruden et al., (2011) fann på motsvarande sätt stora variationer i barns spatiala kunnande, relaterade till deras erfarenheter av att använda spatiala ord i hemmen. Barnen och deras vårdnadshavare filmades i vardagliga situationer då barnen var mellan 14 och 46 månader. Vissa aspekter av barnens spatiala förmågor testades ett halvår senare. Antalet spatiala ord som vårdnadshavare använde var relaterat till hur många spatiala ord som barnen själva använde. Barnens användning av spatiala ord predicerade i sin tur deras spatiala förmågor vid 4,5 års ålder. Barn som exponerades för många spatiala ord var bättre på att kopiera geometriska former och att rotera objekt mentalt. En hypotes som forskarna för fram är, att rika erfarenheter av kommunikation med matematiskt innehåll kan ha stimulerat barnen att själva rikta sin uppmärksamhet mot matematik i omvärlden, vilket kan ha lett till att de spontant fick ännu fler liknande erfarenheter. En annan hypotes är att barnens förmåga att verbalt beskriva de geometriska formerna kan ha varit ett stöd för att skapa en mental modell av den spatiala informationen, som i sin tur underlättade uppgiftens genomförande (Pruden et al., 2011). Durham et al. (2007) fann i en longitudinell studie att vokabulär och syntaktisk förmåga i början av förskoleklass hade signifikanta effekter på läsförmåga i årskurs 2 och matematik i årskurs 3. De fann också att den positiva effekten som socioekonomisk bakgrund hade på barnens skolframgång var relaterad till moderns utbildning och barnets muntliga förmåga i början av kindergarten då barnen var cirka sex år, och till sambandet mellan barnets muntliga förmåga och senare skolframgång. Dessa studier visar att förskolebarns erfarenheter av socialt samspel och exponering för ord med domänspecifikt innehåll, har samband både med barnens aktiva ordanvändning och med deras förmåga att lösa problem inom samma domän. Med hänsyn till vad det innebär att lära sig matematik räcker det inte med att förstå ord och syntaktiska strukturer. Lärande i matematik innefattar att kommunicera tankar och idéer i samspel med andra, att argumentera för dessa idéer och att försöka förstå andras argument (Moschkovich, 2002).

Arbetsminne och matematik

Arbetsminnet beskrivs som ett begränsat arbetsutrymme som hjälper oss att hålla information i medvetandet samtidigt som vi utför någon annan mental process (Raghubar et al., 2010). Det finns flera modeller av arbetsminnets funktioner (se t ex Conway et al., 2009) men den oftast citerade modellen är Baddeley (2000; 2007). Enligt denna modell innefattar arbetsminnet fyra komponenter: den fonologiska bufferten, det visuella skissblocket, den episodiska bufferten och den centrala exekutiven. Den centrala exekutiven utövar kontroll över de andra komponenterna genom att den koordinerar och övervakar den pågående processen, riktar in uppmärksamheten och håller tillbaka ovidkommande impulser. Den fonologiska bufferten och det visuospatiala skissblocket ansvarar för att tillfälligt lagra och processa verbal respektive visuell och spatial information. Den episodiska buffertens funktion är att integrera och samordna information från arbetsminnets olika delar (Baddeley, 2007).

Arbetsminnet är betydelsefullt för läsning, skrivning, hörförståelse, för att följa instruktioner och resonemang och för problemlösning i matematik (Gathercole & Alloway, 2008). Omfattande studier har kunnat visa samband mellan räknesvårigheter och en bristfällig arbetsminneskapacitet (Gathercole & Alloway, 2008; Geary et al., 2000; Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2013). Kyttälä, Aunio, Lepola och Hautamäki (2014) undersökte det verbala och det visuella arbetsminnet och språkliga förmågors samband med förmåga att lösa muntligt presenterade ordproblem, bland barn fyra till sju år gamla. De fann att det fonologiska arbetsminnet var indirekt relaterat till förmågan att lösa muntligt presenterade ordproblem och att det medierades genom vokabulär och hörförståelse. De fann också ett direkt samband mellan ordförståelse och hörförståelse. För att förstå innehållet i ett ordproblem som *Anton har 5 kronor och får 4 kronor till av mamma. Hur många kronor har han nu?,* måste barnen förstå ordens innebörder, skapa sammanhang mellan orden genom att integrera dem med varandra samt hålla viss information i arbetsminnet under tiden som de kommer fram till problemets lösning. Det innebär bland annat att de måste förstå vilken typ av operation det handlar om, till exempel addition eller subtraktion. Svårigheter att lösa muntliga ordproblem behöver inte nödvändigtvis vara kopplat till själva matematiken. Det kan även tyda på att det är de ingående orden, den syntaktiska strukturen, arbetsminnet eller en kombination av flera av dessa faktorer som orsakar problem.

Det visuella arbetsminnet hade ett direkt samband med förmågan att lösa muntliga ordproblem (Kyttälä et al., 2014). Förskolebarn tenderar att lösa ordproblem genom att skapa en analog mental representation av de ingående kvantiteterna, det vill säga att tänka sig föremål som de kan manipulera mentalt (Raghubar et al, 2010; Rasmussen & Bisanz, 2005). Det visuella arbetsminnets kapacitet är begränsat, vilket kan göra det svårt att arbeta effektivt med vissa problem. Ett sätt att underlätta arbetet är att presentera ett problem i visuell form och att låta barnen ha konkreta föremål som de kan titta på, peka på och ta i. På så sätt kan de kompensera för arbetsminnets begränsade kapacitet (Alibali & DiRusso, 1999; Raghubar et al., 2010). Tidigare studier indikerar att förskolebarn och barn i början av skolåldern förlitar sig mer på det visuella arbetsminnet när de löser matematiska uppgifter, medan äldre skolbarn förlitar sig mer på det verbala arbetsminnet och en kombination av båda (Andersson & Lyxell, 2007; McKenzie, Bull & Gray, 2003; Rasmussen & Bisantz, 2005). Frågan om sambanden mellan verbala arbetsminnet, visuella arbetsminnet och tal och räkning är dock oklar. Toll och Van Luit (2012) fann till exempel att verbala, men inte visuella arbetsminnets kapacitet, bidrog till att förklarade variansen i förskolebarns numeriska förmåga. Det är viktigt att notera att trots att både språkliga förmågor och arbetsminne är resurser som stödjer matematiskt arbetete, så beror barnens förmåga att använda matematik i första hand på kunskap om tal och tals användning (Jordan, 2007). I den studie av Nunes et al. (2007) som nämnts tidigare inkluderades test på arbetsminnets kapacitet. Resultaten visade signifikanta samband mellan arbetsminne, barns förmågor att resonera logiskt då de var cirka 6 år och deras prestationer i matematik 16 månader senare. När arbetsminnet hölls under kontroll i statistikbearbetningen fortsatte logiska förmågor att predicera senare matematiska prestationer.

Innehållet, som har diskuterats i detta kapitel har sin bakgrund både i psykologiska och matematikdidaktiska teorier och forskning, men med tyngdpunkt på den förra. Som nämndes i inledningen till detta kapitel har den matematikdidaktiska forskningen oftast en bredare syn på undervisning och lärande i och om matematik, jämfört med den psykologiska forskningen. De senaste årtiondena har flera inflytelserika matematikdidaktiska ramverk publicerats som beskriver matematiskt kunnande som samverkan mellan olika förmågor. Dessa ramverk lyfter fram att det är utvecklingen av detta komplexa kunnande som bör vara undervisningens syfte vilket diskuteras i nästa avsnitt.

Matematikdidaktiska ramverk och undervisning

På uppdrag av National Research Council (NRC) utarbetade Mathematics Learning Study Committee i USA, rapporten *Adding it up, helping children learn mathematics* (Kilpatrick et al., 2001). Det är en syntes av forskning om lärande och undervisning med fokus på förskolebarn och elever till och med årskurs 8, med åtföljande rekommendationer för beslutsfattare och lärarutbildning, och med råd för undervisning. Rapporten omfattar fem matematiska förmågor som är tätt sammanvävda med varandra och som kan beskrivas som: *begreppsförståelse, procedurell förmåga, matematiskt logiskt resonemang, problemlösningsförmåga* och *en positiv attityd till matematik*. Positiv attityd till matematik innefattar en uppfattning om att lärande i matematik är beroende av erfarenheter och ansträngning, och inte en uppsättning fasta förmågor och färdigheter. En fördjupad analys och syntes av forskning om matematiklärande med åtföljande rekommendationer och råd, med fokus på åldersgruppen tre till och med sex år, genomfördes av The Committee on Early Childhood Mathematics (Cross et al., 2009). Rapportens innehåll ansluter till de fem förmågor som beskrivs i National Council of Teachers Mathematics Standards (2000) men diskuteras enbart med fokus på yngre barn. Dessa förmågor är relaterade till *representationer, problemlösning, resonemang, samband* och *kommunikation:*

Representationer används på alla nivåer i matematik och matematiskt arbete. Det kan vara allt från konkreta avbildningar till abstrakta formler. Barn kan använda representationer för att resonera om objekt, tal, relationer, procedurer och mönster.

Problemlösning och *resonemang* sägs vara matematikens hjärta. Problemlösning innefattar att formulera, representera och lösa problem, samt att reflektera över de resonemang som förs i problemlösningsprocessen. Genom att resonera matematiskt kan barn upptäcka regelbundenheter och mönster, både bland de matematiska idéer de exponeras för och de som de använder spontant.

Samband och *kommunikation* handlar om att lära sig att beskriva sina tankar och resonemang. Barnens språk, deras informella matematiska erfarenheter, problemlösning och undersökningar, är grunden för att förstå och använda ett formellt matematiskt språk och tänkande. Kopplingar mellan informella och formella representationer och erfarenheter behöver kontinuerligt utvidgas och fördjupas i kollektiva aktiviteter, där barn får resonera om sina tankar och idéer (Cross et al., pp. 42-45).

Att de fem distinkta matematiska förmågorna samtidigt är tätt sammanvävda med varandra synliggörs bland annat genom att resonemang och representationer återfinns i beskrivningarna ovan som en del av samtliga övriga förmågor. I denna uppsats konceptualiseras det matematiska pedagogiska programmet i termer av resonemang och representationer, varför dessa begrepp diskuteras närmare i texten som följer.

Resonemang

Grundläggande för undervisning och lärande med fokus på utveckling av number sense är aktiviteter vars syfte är att främja relationellt tänkande. Relationellt tänkande innefattar att göra kopplingar mellan flera representationer, eller mellan en matematisk idé och en annan idé (Mulligan, 2011). Förmåga att tänka relationellt är, enligt Mulligan, typiskt för barn som letar efter skillnader och likheter, som söker mönster och struktur i nya situationer. Denna process är kritisk för abstrakt tänkande och generalisering och kan underlätta arbetsminnesprocesser och bidra till djupare matematisk förståelse. Att tänka relationellt är dock inte liktydigt med att generalisera (Mason, 1996). När barn och lärare gemensamt undersöker kommutativiteten i addition med hjälp av exemplet, $4 + 1 = 1 + 4$, kan barnen förklara varför detta specifika exempel är sant. För läraren är detta ett exempel på något mer generellt, men för barnen är exemplet troligen det hela, det som är. Mason gör en distinktion mellan att *se igenom* ett exempel och att *se på* ett exempel. Medan läraren ser det generella genom det specifika exemplet, så ser många av sexåringarna enbart det specifika exemplet. I undervisningen kan man arbeta med en sekvens av sammanhängande aktiviteter för att söka det generella, och man kan arbeta med aktiviteter just som specifika exempel. Mason betonar betydelsen av att arbeta med både och, det vill säga att undervisningen bör syfta till att barnen kan upptäcka det generella genom det specifika, och det specifika i det generella. Ett sätt att göra det på är att resonera med kamrater och lärare om representationer. Matematiska resonemang är både ett redskap för att lära och en förmåga att utveckla (Ball & Bass, 2003).

Lithner (2008) definierar matematiska resonemang som *the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving* (p 257). I detta perspektiv är inte resonemang begränsat till bevis eller formell logik. Resonemang kan enligt Lithner även vara felaktiga om det för personen i fråga finns rationella och logiska orsaker bakom resonemangen. Barns tankar är ofta implicita, de är inte tillgängliga för reflektion. I föreliggande studie är ett syfte med undervisningen att barnen ska bringa sina tankar till en medveten nivå och att de tas tillvara och blir en central del i diskussionerna. Då behöver vi skapa samtalsmönster som främjar barns vilja att dela sina tankar med andra.

Matematiska resonemang är en del av både förskolans och grundskolans läroplan (Skolverket, 2011a; 2011b) och barn som bara är cirka två-tre år kan förstå logiska relationer som "om du sitter bredvid mig då jag sitter bredvid dig (Björklund, 2007). Förskolebarns sätt att resonera skiljer sig dock ofta från äldre elevers eller matematikers sätt att resonera. Diskussioner mellan barn i förskoleklassen är ofta knuten frågan "varför" och till barnens önskan att förklara (Helenius et al., 2013). Det finns en komplexitet inbyggd i förklaring och ofta har vi många olika förklaringar på en varför-fråga. Förklara inkluderar att ställa frågor och att experimentera med olika lösningar genom att jämföra olika idéer. Att förklara sina idéer eller förslag till lösning på ett problem är inte exakt detsamma som att berätta om dem. Helenius et al. påpekar att när ett barn berättar vilka steg som används för att lösa ett problem ger det viss information om varför något fungerade, medan en beskrivning av motiven till varför just dessa steg utfördes, troligen ger mer utförlig information om de mentala processer som användes för att lösa problemet. Yackel och Hanna (2003) betonar sociala aspekter av resonemang. I ett socialt perspektiv är resonemang en kollektiv aktivitet där man interagerar för att tillsammans lösa ett matematiskt problem. I samarbete med lärare och kamrater kan barn utveckla sina intuitiva tankar och idéer genom att hjälpa varandra att förfina och revidera sina argument, utmana varandra och generera nya idéer (Francisco & Maher, 2005). Genom att undervisningen stödjer användning av informella argument och slutsatser, får barnen betydelsefulla tillfällen av att engagera sig i aktiviteter som liknar formell logik och bevisföring långt innan de har tillgång till, eller kan uttrycka sig med formella notationer och formellt logiskt tänkande.

Devlin (2000) har definierat resonemang som en process för att samla information för att fatta ett beslut där ny information integreras med tidigare kunskap. Resonemang kan med denna definition betraktas både som en individuell mental process och som ett interaktivt kollektivt arbete som bygger på muntlig information, skriftspråk, konkreta handlingar och andra former av resurser såsom barnens teckningar.

Representationer

Tal är abstraktioner, idéer, och enda sättet att få tillgång till matematiska idéer är genom representationer av dem (Kilpatrick et al., 2001). Tal är i sig polysemiska (Winsløv, 2004) vilket innebär att för varje matematiskt objekt finns det flera representationer. Tal refererar inte till själva objekten (Van Oers & Poland, 2007). För att urskilja *femhet* ur grupper med objekt såsom klossar, pinnar och knappar, måste vi fokusera på vissa gemensamma drag. Att se femheten innebär att vi uppmärksammar en aspekt som är *samma*, i grupper av objekt som ser helt olika ut (Sfard & Lavie, 2005). Vi väljer att betona denna aspekt samtidigt som vi ignorerar andra visuella egenskaper, till exempel färg, form och storlek (Mason, 1996). Men eftersom femheten inte finns i objekten går det heller inte att helt enkelt *hämta ut* information från objekten. Vad vi snarare gör är att *läsa in* mening i dem (Säljö, 2005). Ett av flera sätt att göra det på är att låta abstrakta begrepp som femhet bli föremål för resonemang om representationer, tillsammans med lärare och kamrater i förskoleklassen.

Representationer innefattar enligt Kilpatrick et al. (2001) objekt, handlingar, bilder, symboler och ord. En representations styrka handlar om i vilken utsträckning vi kan utnyttja den för att skapa samband mellan fenomen som på ytan verkar helt olika, vilket är särskilt betydelsefullt i matematik (Bruner, 1966). När förskolan 2010 fick ett förtydligande av läroplanen, fick representationer ett stort utrymme både generellt och med specifikt fokus på matematik. I förtydligandet av läroplanen (Utbildningsdepartementet, 2010) beskrivs sex matematiska aktiviteter som konkretisering av förskolans strävansmål i matematik. För var och en av dessa aktiviteter betonas representationer som en del av matematikundervisningen. Här följer ett exempel som återfinns under aktiviteten *Räkna: Skapa representationer av resultat av undersökningar. Erfara tal med konkret material, teckningar, bilder, diagram, ord och andra uttrycksformer samt utveckla symboliskt tänkande*. (s 11).

I kommentarmaterialet till grundskolans läroplan (Skolverket, 2011) uttrycks det på följande sätt:

> Genom att använda olika uttrycksformer kan elevernas förståelse av matematiska begrepp fördjupas. Det kan till exempel innebära att utveckla förståelse för att en fotbollsplan kan uttryckas som en rektangel eller att fem klossar kan representera talet fem. Det kan också innebära att med hjälp av konkret material, bilder, symboler, grafer eller formler kunna beskriva begrepp som cirkel eller exponentiell tillväxt (s 9).

Betydelsen av representationer poängteras även i internationella ramverk såsom Principle and Standards for School Mathematics (2000):

> Instructional programs from pre-kindergarten through grade 12 should enable all students to create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas; select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems; use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena (p 67).

Även abstrakta operationer med tal kan representeras. När ett barn lägger samman 3 klossar och 2 klossar kan den fysiska situationen representeras genom att barnet ritar 3 streck och 2 streck, eller skriver det symboliska uttrycket 3 + 2. Ett annat sätt kan vara att göra förflyttningar på tallinjen, först i tre steg, sedan i två steg. Huruvida ett symboliskt uttryck representerar fysiska föremål eller vice versa beror på utgångspunkten för additionen. Både objekt och symboler representerar en matematisk idé, vilken är oberoende av vilken representation som används. Däremot har olika representationer för- och nackdelar beroende på person och sammanhang (Kilpatrick et al., 2001) framhåller tallinjens särställning som representation för grundskolans undervisning i number sense eftersom tal som används i förskola och grundskola (positiva och negativa heltal, tal i bråkform och tal i decimalform) ingår i den konsekventa och enhetliga struktur som tallinjen utgör.

I föreliggande intervention har barnen arbetat med olika representationsformer som konkreta objekt, ikoner, streck, prickar och siffror. Eftersom tallinjen kan vara en alltför abstrakt konstruktion för att fungera som ett effektivt redskap för tänkande för yngre barn (NCTM, 2000) har förskoleklassen istället arbetat med talraden. Talraden innefattar till skillnad från tallinjen, endast positiva heltal med start på talet ett. Talen representeras oftast med siffror tecknade på stora rektangel- eller cirkelformade ark som kan fästas som en talrad på golvet, eller tillverkas i ett mindre format, ungefär som en traditionell kortlek. Arbete med talraden i undervisningen före den formella skolstarten har, som nämnts tidigare, visat sig framgångsrikt för utvecklingen av number sense (Griffin, 2007; Ramani & Siegler, 2008).

Bruner (1966) beskriver tre former av representationer: enaktiv, ikonisk och symbolisk representation. Enaktiv representation innefattar objekt och handlingar, ikonisk representation innefattar bilder och symbolisk representation innefattar skriftliga symboler och ord. En kritisk faktor för undervisningen i förskoleklass är kopplingen mellan olika representationsformer och på vilka sätt undervisningen kan stödja utvecklingen av förståelse för dessa samband. Ett sätt att göra det kan vara med stöd av den modifierade undervisningsmodellen CRA *(Konkret-Representativ-Abstrakt)* som har använts i föreliggande studie.

Konkret - Representativ - Abstrakt (CRA)

En forskningsöversikt (Gersten et al., 2005) och en metaanalys (Gersten et al., 2009) indikerar att systematisk och explicit undervisning är särskilt effektiv för elever i riskzonen för att utveckla svårigheter i matematik. CRA-modellen är som nämnts tidigare, en strukturerad och explicit undervisningsmodell (Witzel, et al., 2003) där barn och lärare arbetar i tre faser från *konkreta* till *representativa* till *abstrakta* representationer. I föreliggande studie har en modifierad och undersökande form av modellen använts som bygger på barns och lärares kollektiva resonemang om representationer.

Lärande och utveckling - teoretiska utgångspunkter

I detta avsnitt beskrivs ytterligare några teoretiska utgångspunkter och empirisk forskning som kan belysa aspekter av det undervisningsprogram som ligger till grund för interventionen i matematik i förskoleklass. Det matematiska pedagogiska programmet, som är avsett för klassundervisning kombinerat med smågruppsarbete och individuellt arbete, är teoretiskt grundad i Vygotskys arbeten (1978; 1934/2012; 2004) och har stöd i empiriska studier (Brooks, 2005; 2009). Inledningsvis beskrivs några teoretiska begrepp som är väsentliga för förståelse av barns teckningar som medierande redskap i undervisningen. Därefter redogörs kort för bakgrunden till Brooks empiriska studier.

I Vygotskys teori är det den sociala interaktionen mellan barn och vuxna som är den huvudsakliga källan till lärande och utveckling (Vygotsky, 1978). Människans biologiska utveckling ses som en förutsättning för lärande, men den är inte bestämmande. Betoningen ligger på förståelse för hur människor utvecklar och använder fysiska redskap, tecken och kunskaper som tar oss långt bortom den biologiska utgångspunkten (Säljö, 2005). Exempel på fysiska redskap som används i undervisningen är pennor, miniräknare och datorer. Tecken är till exempel skrift, talsystem, bilder och teckningar. Dessa tecken är redskap som syftar till att externalisera en tanke eller en idé och att göra dem synliga för oss själva och för andra. En styrka med tecken som skrift och teckningar är att de är permanenta. Vi kan gå tillbaka till dem många gånger, diskutera dem med andra och till exempel revidera, förfina eller förkasta dem (Dysthe, 1996) och de kan fungera som stöd för minnet (Vygotsky, 1978). Genom språket kan vi utveckla och kommunicera kunskap. Vi kan kategorisera och klassificera objekt och händelser, göra jämförelser, analysera och dra slutsatser om hur världen fungerar (Säljö, 2005). Genom muntliga resonemang och genom tecken kan vi dela våra tankar med andra och ta varandras perspektiv. I sociokulturell teori har erfarenheter en avgörande betydelse för lärande och utveckling, men vi behöver inte själva göra alla de erfarenheter som är viktiga för oss (Vygotsky, 2004). Genom språk och tecken kan vi låna erfarenheter av andra som kan berätta för oss vad de varit med om.

Psykologiska processer såsom tänkande, problemlösning, matematiskt arbete och läsning har sin grund i sociala aktiviteter och interaktion med omgivningen. Språket är både ett kulturellt verktyg för att utveckla kunskap och för att dela kunskap med andra, och ett psykologiskt redskap för att strukturera processer och innehåll i det egna tänkandet. Barnets kognitiva utveckling har sin grund i två ömsesidiga processer: en social och en individuell. Inre processer har föregåtts av social interaktion med andra men kunskapen är individuellt konstruerad (Vygotsky, 1978; 1934/2012). Barnets erfarenheter är därför avgörande för lärande och utveckling.

Vygotskys arbeten innefattar teorin om spontana och vetenskapliga begrepp. Spontana begrepp utvecklas genom socialt samspel och erfarenheter i vardagliga situationer. Dessa begrepp är till skillnad från vetenskapliga begrepp osystematiska och Vygotsky (1934/2012) betecknar dem som omedvetna. Utvecklingen av spontana begrepp rör sig nerifrån och upp, från det specifika och konkreta, till det generella och abstrakta. Utvecklingen av vetenskapliga eller skolade begrepp går i motsatt riktning, från det generella till det specifika. Spontana och vetenskapliga begrepp rör sig vertikalt mot varandra och påverkar varandra ömsesidigt. Positiva möten mellan de spontana och vetenskapliga begreppen öppnar för en utvecklingszon för de spontana begreppen, *zonen för proximal utveckling* (Vygotsky, 1934/2012).

Zonen för proximal utveckling (ZPD) är avståndet mellan den aktuella utvecklingsnivån, det vill säga vad ett barn kan klara på egen hand, och vad barnet kan göra med stöd av en vuxen, eller i samarbete med mer kunniga kamrater (Vygotsky, 1978). I detta perspektiv är undervisningen inte underordnad barnets aktuella utvecklingsnivå och undervisning är inte heller lika med lärande. Men ett välorganiserat lärande kan sätta inre utvecklingsprocesser i rörelse som inte annars skulle vara möjliga. Lärande är en utvecklingsprocess som skapar zonen för proximal utveckling. Radford

(2010) betonar att ZPD är ett relationellt begrepp som formas ur interaktionen mellan barn och mellan barn och lärare. Lärande går före utveckling och ZPD:s dynamiska och socialt relationella karaktär innebär att det som idag är den proximala utvecklingszonen, kan i morgon vara den aktuella utvecklingszonen. Det som barnet igår klarade med hjälp av en vuxen eller i ett annan lämpligt socialt sammanhang, kan det idag klara på egen hand. Utvecklingen går från det interpersonella eller sociala, till det intrapersonella eller individuella. Barnets aktuella utvecklingsnivå karakteriserar mental utveckling retrospektivt, det vill säga funktioner som är utvecklade, medan zonen för proximal utveckling karakteriserar den mentala utvecklingen i ett framtidsperspektiv (Vygotsky 1934/2012). I interaktionen mellan barn och lärare betraktar Vygotsky läraren både som utmanare av barnets tänkande och som deltagare i arbetet (1934/2012). Ett begrepp som inte användes av Vygotsky men som ofta nämns i detta sammanhang är *scaffolding,* det vill säga stöttning (Bruner, 1960). Stöttning innebär att läraren fungerar som intellektuell byggnadsställning som gör det möjligt för barnet att lösa problem som inte hade varit möjligt att lösa utan detta intellektuella stöd. Vartefter barnet tillägnar sig kunskapen minskar läraren graden av stöttning tills den kan upphöra.

Forskning visar att förståelse för sambanden mellan icke-symboliskt språk (ett barn löser t ex ett problem med hjälp av klossar) och ett matematiskt symbolspråk, är en kritisk faktor i utvecklingen av number sense (Baroody et al., 2009a; Clements & Sarama, 2007; Desoete et al., 2012; Ginsburg, 1975; Ginsburg et al.,2008; Johnsen Høines, 2000; Jordan, 2007; Purpura et al., 2013; Ramani & Siegler, 2008). Vygotsky (1978) gjorde en distinktion mellan symboler av första ordningen och symboler av andra ordningen. När barn ritar och skriver tecken som betecknar objekt och händelser, fungerar tecknen som första ordningens symboler. Andra ordningens symboler är skrivna tecken som betecknar ljud och ord i det talade språket, som i sin tur är tecken för verkliga enheter (entities) och relationer (Vygotsky, 1978). Baserat på empiriska studier beskriver Vygotsky hur klotter och primitiva tecken ersätts med små figurer och bilder, som i sin tur banar väg för tecken. Dessa tecken betecknar objekt eller händelser och är första ordningens symboler. För att nå andra ordningens symboler måste barnet komma till insikt om att man förutom att rita saker och händelser, kan rita och skriva talat språk. Det är viktigt att notera att samtidigt som tal och skrift är relaterade till varandra, är de inte helt utbytbara (Säljö, 2005). Talet är en del av det som gör oss till just människor och har en lång evolutionär historia, medan skriften är en mänsklig konstruktion utvecklad för vissa syften (Säljö, 2005). Läs- och skrivinlärningen handlar om socialisering in i en värld av kommunikation med specifika krav och regler för hur man får uttrycka sig. Detsamma gäller för det matematiska symbolspråket.

Bakgrunden till Brooks arbeten med barns teckningar är Vygotskys teori om att kunskap inte är direkt överförbar från en person till en annan och att lärande kräver medierande redskap (Brooks, 2005; 2009). I matematikundervisningen kan till exempel kulramen, miniräknare och tallinjer fungera som medierande fysiska redskap och skrift, talsystem, bilder och teckningar som medierande tecken. I Brooks arbeten betraktas barns teckningar som ett medierande redskap och ett slags språk för tänkande och meningsskapande (Brooks, 2009). En utgångspunkt är Vygotskys beskrivning av språklig mening som en fråga om referentiella relationer mellan ord och konkreta objekt. När ett barn först införlivar ett nytt ord i sitt ordförråd är det situationsbundet och knutet till något konkret. Det innebär att om en vuxen och ett barn använder samma ord kan båda referera till samma objekt, men de kommer att tänka på det på fundamentalt olika sätt (Vygotsky 1934/2012). Den vuxnes sätt att tänka är konceptuellt medan ordet för barnet refererar till något konkret. För att utvecklingen ska gå mot abstrakt innebörd måste barnet röra sig bortom den direkta kopplingen mellan ord och objekt till en mer generaliserad mening. Med spontana begrepp rör sig barnet från saken till begreppet. Med vetenskapliga begrepp rör sig barnet från begreppet till saken. Vygotsky framhåller att för att kunna tänka och lösa problem är det inte tillräckligt att ha etiketter för objekt. Förmåga att använda dessa etiketter i skilda kontexter som tillåter kopplingar som främjar tänkande på en mer abstrakt och konceptuell nivå är nödvändig. Tillägnelsen av namn på objekt innebär inte förståelse för begreppet. För det krävs erfarenheter av att använda eller arbeta med ord och begrepp. Brooks (2009) argumenterar för att teckningar kan vara ett redskap för att rikta barnens uppmärksamhet både mot spontana begrepp och att skapa samband mellan begrepp. När barnen arbetar individuellt med sina teckningar existerar de på en intrapersonell nivå. När tankar eller begrepp externaliseras och finns utanför barnet med teckningar som medierande redskap, kan dessa diskuteras i relation till kamraternas tankar och idéer på en social eller interpersonell nivå (Brooks, 2005). Att använda teckningar som medierande redskap är enligt Brooks mer komplext än att barn lär sig namn på objekt som de kan komma ihåg och upprepa. Barnens teckningar involverar deras tidigare och aktuella erfarenheter, föreställningar och tänkande. Skapandet av teckningar involverar integrering av minne, erfarenhet, föreställningar och uppmärksamhet (Brooks, 2009). För att återkoppla till frågan om den kritiska kopplingen mellan barns informella och formella lärande och relationen mellan icke-symbolisk och symbolisk förmåga som nämnts tidigare, så tyder Brooks studier på att barns teckningar kan fungera som ett medierande redskap mellan spontana och vetenskapliga begrepp.

Kapitel 3 De empiriska studierna

Uppsatsens övergripande syfte

Denna licentiatuppsats består av två integrerade delstudier med det övergripande syftet att med stöd av iterativ metod pröva ut ett matematiskt pedagogiskt program riktat till förskoleklassen, baserat på strukturerad, explicit undervisning och barns kollektiva resonemang om representationer av fenomen med matematisk relevans, och att implementera och utvärdera effekten av en 10 veckors randomiserad kontrollerad intervention i förskoleklass, med utgångspunkt i ovan nämnda pedagogiska program.

Två separata men integrerade empiriska studier har sålunda genomförts. Metodologiskt innebär det att olika analysmetoder har använts för att pröva ut det pedagogiska programmet och för att utvärdera effekter av interventionen.

Studie I

Studie I innefattar design och utprövning av det pedagogiska program som ligger till grund för undervisningen i interventionen. De matematiska aktiviteterna som ingår i programmet bygger på forskning och teori om barns utveckling av number sense, och om hur undervisningen kan främja denna utveckling. Syftet med den iterativa utprövningen av aktiviteterna är att förfina tre teoretiska principer som utgör designens ramverk, samtidigt som också det konkreta programmet förbättras. Metodologiskt inordnas denna studie under pedagogisk designforskning med iterativ metod (McKenney & Reeves, 2012).

Forskningsfrågan för Studie I är: Är det möjligt att kombinera de tre teoretiska principerna som utgör designens ramverk, till ett funktionellt pedagogiskt program och hur kan det i så fall beskrivas?

Studie I beskrivs i uppsatsens första artikel (Sterner & Helenius, 2015).

Studie II

Studie II innefattar implementering och utvärdering av effekter av interventionen i matematik i förskoleklass. Det övergripande syftet var att på gruppnivå studera effekter av interventionen på senare matematiska förmågor. Ett ytterligare syfte var att undersöka om visuellt och verbalt arbetsminne och grammatisk språklig förståelse vid pretest, kunde predicera barnens matematiska förmågor på posttestet och uppföljningstestet ett år senare.

Forskningsfrågan för Studie II är: I vilken mån har strukturerade lekar och aktiviteter med fokus på resonemang om representationer effekt på utvecklingen av barns föreställningar om tal, siffror, kvantiteter och enkla räkneoperationer då barnen går i förskoleklass?

En ytterligare forskningsfråga för Studie II är: I vilken mån kan visuellt och verbalt arbetsminne och grammatisk språklig förståelse på pretestet predicera matematiska förmågor på posttestet och uppföljningstestet ett år senare?

Studien är randomiserad och longitudinell, vilket gör det möjligt att göra kausala tolkningar.

Studie II beskrivs i uppsatsens andra artikel (Sterner, Wolff & Helenius, 2014).

Sammantaget bidrar de båda studierna till att besvara uppsatsens övergripande fråga huruvida strukturerad och explicit undervisning i förskoleklass med fokus på tal, resonemang och representationer har effekt på barns matematiska förmåga.

Studie I: Design och utprövning av ett matematiskt pedagogiskt program

Det är känt att det finns starka samband mellan barns matematiska kunnande vid skolstarten och elevers matematikkunskaper i slutet av grundskolan (Duncan et al., 2007). I denna uppsats har det hävdats att förskoleklassen är en potentiell arena för att ge alla barn möjligheter att utveckla kunnande i och om matematik. I diskussioner med förskoleklasslärare har de dock ofta betonat behovet av stöd för att utveckla matematikundervisningen och för att kunna dra nytta av teori och resultat från forskningen om barns utveckling av number sense. Med anledning av detta beslutades att genomföra en designstudie med målet att ta fram ett matematiskt pedagogiskt program för förskoleklassens undervisning om tal och tals användning och att pröva ut detta program empiriskt. Hösten 2010 bildades därför en projektgrupp vid Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) vid Göteborgs universitet. Gruppen bestod av didaktiker och forskare från det psykologiska, matematiska och matematikdidaktiska fältet.

Syfte

Syftet med detta projekt var att designa ett matematiskt pedagogiskt program med fokus på tal och tals användning som avser att leda till att barn i förskoleklass vidareutvecklar sina föreställningar om tal, kvantiteter och enkla räkneoperationer. Avsikten var att pröva ut detta program i samarbete med förskoleklasslärare och deras barngrupper med iterativ metod, där utprövningen i en fas ligger till grund för förfining och fördjupning av programmets innehåll i nästa fas.

Pedagogisk designforskning

Intresset för klassrumsbaserad forskning som inkluderar lärare har ökat under de senaste årtiondena, som ett svar på det gap som finns mellan forskning och praktik (Carlgren, 2012; Pareja Roblin et al, 2014). Carlgren efterfrågar forskningsansatser som har ett inifrånperspektiv, det vill säga forskning som involverar lärare i praktiska lösningar på frågor om undervisning, och för utvecklingen av undervisningen som profession. Designforskning går under flera olika benämningar såsom designexperiment (Brown, 1992; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), utvecklingsdesign (van den Akker, 1999), aktionsforskning, learning och lesson study (Carlgren 2012) och pedagogisk designforskning (Mckenney & Reeves, 2012). I föreliggande studie togs utgångspunkt initialt i Edelson (2002) och senare även i McKenney och Reeves (2012). Utmärkande för pedagogisk designforskning är att den bidrar till teoretisk förståelse och till insatser som löser problem i praktiken

(McKenney & Reeves, 2012). Pedagogisk designforskning är baserad på fem sammanvävda principer. Den skall vara:

Teoretiskt orienterad: Empirisk utprövning används för att validera, förfina eller förkasta hypoteser och antaganden som är inbäddade i designen.

Interventionistisk: Pedagogisk designforskning strävar efter att skapa teoretisk förståelse, och påverka praktiken på ett positivt sätt och att åstadkomma förändring genom utformningen och användningen av lösningar på verkliga problem.

Samverkande: Pedagogisk designforskning genomförs i samverkan med flera aktörer och pedagogiska kontexter.

Behovsgrundad: Produkten av pedagogisk designforskning formas av deltagande expertis, litteratur och i synnerhet av praktisk utprövning.

Iterativ: Genom upprepade iterationer av undersökningar, utveckling, testning och förfining utvecklas både insikter och interventioner över tid (pp 13-15, författarens översättning).

Föreliggande studie vilar på dessa fem principer. Den är *teoretiskt orienterad* genom att tre initiala designprinciper som bygger på olika områden av teori och forskning, konkretiserades genom specifika undervisningssekvenser och presenterades i en lärarguide. De teoretiska principerna implementerade i denna lärarguide är tillgängliga för förskoleklasslärare, vilket gör den *interventionistisk*. Den är s*amverkande* eftersom forskare och lärare med olika bakgrund bidrog till design, utvärdering, utveckling och teoretisering av resultaten. Den är *behovsgrundad* då det är praktikens behov som gav inspiration att starta projektet och den är *iterativ* genom att flera cykler av utprövning ledde till att både lärarinstruktioner i lärarguiden och designprinciperna förfinades som ett resultat av utprövningen. Huvudsakligt fokus i föreliggande studie är den teoretiska orienteringen. Tre initiala designprinciper, baserade på olika områden av teori och forskning, konkretiserades i ett pedagogiskt program med sekvenser av undervisningsaktiviteter presenterad i en lärarguide.

Deltagare och procedur

Det matematiska pedagogiska programmet har prövats ut i fyra faser och för varje fas har en ny grupp förskoleklasslärare rekryterats. Sammantaget medverkade 26 förskoleklasslärare i den iterativa utprövningen av programmet. Rekryteringen av lärarna har för de tre första faserna skett genom att skolor utvalda utifrån vissa kriterier kontaktades. Kriterierna var valda så att medverkande skolor tillsammans skulle representera storstad, mindre stad och landsort. Skolorna skulle ligga i socialt varierade områden och de skulle vara möjliga att nå med allmänna kommunikationsmedel över en dag. Det sistnämnda hade rent praktiska skäl och var en förutsättning för regelbundna fysiska möten mellan forskare och lärare. I var och en av de tre första utprövningarna medverkade sex förskoleklasslärare med sina klasser. Den genomsnittliga åldern för lärarna i den första fasen var 42 år med i genomsnitt 15 års yrkeserfarenhet. Genomsnittsåldern för lärarna i den andra fasen var 43 år med i genomsnitt 18 år yrkeserfarenhet och lärarna i den tredje fasen var i genomsnitt 46 år med en genomsnittlig yrkeserfarenhet av 17 år.

I samband med den fjärde fasen av utprövningen genomfördes den matematiska intervention som beskrivs i Studie II. Dessa lärare och deras klasser rekryterades genom att skolförvaltningen på en ort i Västsverige lämnade information om vilka skolor som omfattade förskoleklass, antal elever per skola, föräldrars utbildningsnivå per skolupptagningsområde samt elever med annat hemspråk än svenska. Fjorton socialt jämförbara skolor kontaktades med förfrågan om intresse av att delta i den aktuella studien och tolv av dessa skolor tackade ja till att medverka. I samband med förfrågan lämnades information om att denna uppsats syfte var att pröva ut ett matematiskt pedagogiskt program och att genomföra en intervention i matematik i förskoleklass. Information lämnades också om att förskoleklasserna och deras lärare skulle komma att slumpmässigt lottas till experimentgrupp respektive aktiv kontrollgrupp. De åtta lärare som medverkar i interventionen med sina klasser är också de som har prövat ut det matematiska pedagogiska programmet i den fjärde fasen. Lärarnas genomsnittliga ålder var vid studiens genomförande 44 år och de hade i genomsnitt 14,5 års yrkeserfarenhet.

Seminarier, möten mellan praktik och forskning

Avsikten med det matematiska pedagogiska programmet är att utgöra ett stöd för lärarna i förskoleklass och undervisningen om tal och tals användning. Vägen från design av aktiviteter till att de blir ett stöd i undervisningen är komplex. Liljedahl, Chernoff & Zazkis (2007) diskuterar vissa aspekter av lärarkompetens som bör beaktas: Lärarna måste vara medvetna och kunniga om den matematik som är inbäddad i aktiviteterna. De måste förmå att frigöra denna matematik ur aktiviteterna. Lärare behöver ha en fördjupad förståelse av barnens matematiska kunnande, både som individer och som kollektiv, och de behöver ha förståelse för hur man kan utnyttja denna kunskap för barnens lärande. Denna syn på aktiviteters roll är i linje med den pedagogiska modell som har designats i denna studie och dessa utmaningar har beaktats genom att:

– i lärarguiden inkludera teoretiska texter och förklaringar till matematiken inbäddad i aktiviteterna

– efter hand förfina och revidera aktiviteterna med utgångspunkt i lärarnas erfarenheter av varje fas i utprövningen

– anordna seminarier för lärarna parallellt med att de prövade ut aktiviteterna i egna barngrupper.

Seminarierna

Förskoleklasslärarna och projektledaren har träffats vid sju seminarier. Tiden för seminarierna har legat på eftermiddagar mellan klockan 14.00 och 17.00 och vi har alternerat mötesplats mellan de skolor där lärarna arbetar. Det har varit en praktisk lösning men också ett sätt att lära känna varandras arbetsmiljöer. Alla seminarier har i princip följt samma struktur utom vid det första och vid det sista tillfället:

- Återkoppling på det föregående seminariets innehåll.
- Utbyte av erfarenheter och diskussion om utprövningen av aktiviteter, relaterat till praktiken såväl som till forskning.
- Föreläsning om teori och forskning om nästkommande matematiska tema.
- Planering för utprövningen av nästkommande temas aktiviteter.
- Genomgång av texter att läsa inför nästa seminarieträff.

Vid det första seminariet reflekterade lärarna över sin egen matematikundervisning, sina uppfattningar om matematik och hur de såg på undervisning och lärande i matematik. Ett syfte med detta var att tidigt skapa ett rum öppet för diskussioner och möjligheter att dela sina tankar och idéer med varandra och med mig som projektledare. Ett annat syfte var att i kompetensutvecklingen koppla ihop lärarrollen med barnens möjligheter att lära. En övergripande diskussion om syftet med interventionen och undervisningsaktiviteterna fördes, och viss tid ägnades också åt praktiska och organisatoriska frågor relaterade till utprövningen. Projektledaren förde anteckningar vid samtliga seminarier vilka följdes upp på nästkommande träff.

De påföljande seminarieträffarna fokuserade i tur och ordning på de fem matematiska teman som ingår i programmet. Under den första punkten ovan kunde projektledaren kontinuerligt stämma av sina anteckningar med lärarnas uppfattningar om innehållet i föregående seminarieträff, vilket innebar att eventuella oklarheter eller frågor snabbt kunde åtgärdas. Lärarnas erfarenheter av utprövningen följdes upp och diskuterades på varje seminarium. Deras anteckningar, exempel på barnens dokumentationer, foton och korta beskrivningar över erfarenheter av utprövningen bidrog till att fördjupa diskussionerna om undervisningen. I diskussionerna har lärarna med stöd i det pedagogiska programmets teoretiska texter och med stöd av projektledaren, kunnat hjälpa varandra att tränga djupare in i de matematiska begrepp som är i fokus i aktiviteterna. Stein, Engle, Smith och Hughes (2008) påpekar att för att lärare ska kunna involvera barns tankar och idéer och bygga vidare på dem i undervisningen, måste lärarna ha kunskap och idéer om vad som kan vara kritiska aspekter av olika matematiska begrepp och strategier, och känna till exempel på uppfattningar som de kan förvänta sig att möta bland barnen. De behöver också ha viss beredskap för hur dessa uppfattningar kan tas till vara och utmanas. Föreläsningarna som projektledaren ansvarade för, syftade till att fördjupa diskussionerna och att utgöra ett stöd inför den praktiska planeringen av undervisningen, så att lärarna hade en viss framförhållning och beredskap för den kommande utprövningen. Det sista seminariet ägnades åt gemensamma reflektioner över erfarenheter av utprövningen och kompetensutvecklingen.

Likaväl som det hos lärarna fanns behov av seminarier med föreläsningar och gemensamma diskussioner, så fanns det från projektledarens sida behov av dessa regelbundna möten med lärarna. Frågor som var ständigt aktuella under utprövningen var till exempel:

- Hur förstår lärarna de teoretiska texterna, syftena med aktiviteterna och beskrivningarna av deras genomförande?
- Hur väl följer lärarna instruktionerna i lärarguiden?
- Vilka aktiviteter visade sig vara svåra att genomföra?
- Vilka aspekter av en cykel visade sig vara besvärliga för läraren eller barnen?
- Vilka oväntade möjligheter uppstod som kan tas med i en revidering och en förfining av modellen?

Designprinciper

Utformningen av de matematiska aktiviteterna bygger på teori och forskning om utvecklingen av förståelse för och användning av matematiska begrepp och processer som är betydelsefulla för barns utveckling av number sense och hur undervisningen kan stödja utvecklingen. Design av aktiviteterna har teoretiska utgångspunkter i sociokulturellt perspektiv (Vygotky, 1978; 2004; 2012) och teorier om betydelsen av kommunikativa arbetssätt baserade på kognitiv och matematikdidaktisk forskning (Berch, 2005; Clements & Sarama, 2007; Clements et al., 2013; Cross et al., 2009; Dyson et al., 2011; Griffin, 2004; 2007; Sarama & Clements, 2009). Användningen av en bred variation av representationer har sin bakgrund i uppfattningen av matematiska begrepp som polysemiska (Kilpatrick et al., 2001; Winsløv, 2004). Vid utformningen av programmets struktur och de enskilda aktiviteterna har hänsyn tagits till forskning som visar att strukturerad och explicit undervisning kan vara särskilt gynnsam för elever i riskzonen att utveckla svårigheter (Clarke et al., 2011; Gersten et al., 2009). Samtidigt har utformningen av aktiviteterna haft utgångspunkt i förskolans styrdokument. I förtydligandet av förskolans läroplan (Utbildningsdepartementet, 2010) används verben *experimentera, testa, föreslå, förutsäga, reflektera, granska, generalisera, argumentera* och *dra slutsatser* som beskriver vad vi gör när vi arbetar matematiskt, vilket är långt ifrån att läraren i huvudsak visar och förklarar. En ytterligare utgångspunkt för aktiviteternas utformning var Griffin (2007) fem principer för undervisning beskrivna på sidan 20 i denna uppsats. De matematiska aktiviteterna är i sig inte unika. Liknande aktiviteter förekommer ofta i olika versioner i förskolans och

skolans undervisning. Arbetet med att designa aktiviteterna har framför allt inneburit att utforma dem på sådant sätt, att de främjar ett undersökande arbetssätt som bygger på kollektivt arbete och resonemang där barnen fungerar som resurser för varandra. Undervisningsmodellen är explicit, strukturerad med aktiviteter som är genomtänkta, både hur de passar in i en sekvens och hur de ska fungera enskilt. Nyckeln till att integrera dessa två aspekter med varandra ligger i synen på lärarrollen, hur matematikinnehållet förstås som polysemiskt och hur barns kollektiva resonemang fungerar som en mekanism för lärande.
Tre principer låg till grund för den initiala designen av den pedagogiska modellen.

Principen om strukturerade sekvenser av aktiviteter

Den första designprincpen är att barnen ska möta strukturerade sekvenser av aktiviteter. Detta har visat sig särskilt effektivt för barn som är i riskzonen för att utveckla svårigheter (Gersten et al., 2009). Sättet att skapa sekvenser av aktiviteter påminner om design baserad på lärandebanor (Clements & Sarama, 2007; Clements et al., 2011), det vill säga aktiviteter som bygger på varandra i en hierarkisk ordning och där undervisningen sker stegvis. Lärandebanor innefattar enligt Simon (1995) och Clements et al. (2011), tre komponenter: 1. Lärandemål som definierar riktningen för undervisningen. 2. Undervisningsaktiviteterna. 3. De hypotetiska lärprocesserna, det vill säga en förutsägelse av hur elevernas tänkande och förståelse kommer att utvecklas.

För att underlätta undervisningen för lärarna är aktiviteterna grupperade i fem teman: *Sortering, klassificering och mönster, Mängder, antal och mönster, Tals helhet och delar, Talraden och tallinjen* samt *Positionssystemet.* Ordningen mellan temana och hur de är relaterade till varandra är baserad på Griffins studier om den konceptuella strukturen för hela tal (2003; 2007) och principen om att tal är polysemiska, det vill säga att för varje tal finns det många representationer (Kilpatrick et al., 2001; Winsløv, 2004). Skälet till att placera sortering och klassificering före temat om tal och räkning är inte att sortering och klassificering ses som en förutsättning för innehållet i övriga teman, utan är snarare relaterat till interventionens starka fokus på resonemang om representationer. Erfarenheter och återkoppling från lärare visar att sortering, klassificering och mönster, är områden där det är lättare att etablera sociomatematiska normer, som att jämföra lösningar och strategier och söka matematiskt viktiga likheter och skillnader (Yackel & Cobb, 1996), och etablera värden som utgörs av kollektiva resonemang och att dela sina tankar och idéer med andra (Radford, 2014).

Principen om explicit undervisning

Den andra designprincipen är baserad på CRA-modellen (Concrete-Representational-Abstract) (Witzel, et al., 2003). Modellen är linjär och strukturerad genom att undervisningen rör sig från konkreta till representativa till abstrakta representationer. I föreliggande studie har en modifierad och undersökande form av modellen använts som utgår från att barnen själva under lärarens ledning tar ett inledande ansvar för att arbeta med problemet. I en inledande kollektiv fas introducerar läraren ett problem. Barn och lärare arbetar tillsammans med problemet och använder konkreta objekt. Därefter följer pararbete där barnen löser ett liknande problem men med andra representationer. I nästa kollektiva fas resonerar gruppen och läraren om barnens arbeten. Därefter följer en individuell fas där barnen dokumenterar (ritar) sitt arbete med olika former av ikoniska representationer. Denna form av symbolisering och åtföljande resonemang representerar det tidigare konkreta arbetet och fungerar som en representation av en konceptuell förståelse för problemet. I den sista fasen leder läraren en samling där varje barn presenterar sin representation och resonerar om den i relation till kamraternas representationer, av det problem som aktiviteten handlar om. Den modell som används i denna studie är alltså explicit i den meningen att varje aktivitet följer en specifik struktur, och i den meningen att aktiviteter är konstruerade för att illustrera centrala matematiska principer, i enlighet med en vedertagen modell (Griffin, 2007) för barns utveckling av number sense Den pedagogiska modellen är dock inte explicit i den meningen att läraren först visar lösningen av de problem som aktiviteterna inkorporerar.

Principen om kollektiva resonemang om representationer

Den tredje principen innefattar betoning på barns dokumentation (teckningar) och kollektiva resonemang om deras arbeten som det huvudsakliga redskapet för lärande. Bakgrunden till detta ställningstagande är att den pedagogiska modellen ska kunna fungera i förskoleklassens kontext. Förskoleklassen regleras av den nationella läroplanens allmänna delar (Skolverket, 2011a) men däremot inte av läroplanens kursplaner. En avsikt med förskoleklassen är att den ska fungera som en brygga mellan det oftast informella lärande som sker i förskolan och det mer formella lärandet som tar vid i skolan (Skolverket, 2011b). Svensk förskola kännetecknas av att undervisningen ska främja barns utveckling, kreativitet och lärande. I samarbete med lärare och kamrater ska barn få utveckla förmågan att undersöka problem och matematiska begrepp, resonera och kommunicera idéer och tankar och använda olika representationer. I Vygotskys teori (1978) är den sociala interaktionen mellan barn och vuxna den huvudsakliga källan till lärande och utveckling. Språk ses både som ett kulturellt redskap för att utveckla och dela kunskap med andra i en social gemenskap och som ett psykologiskt redskap för att strukturera det egna tänkandets processer och innehåll.

Med hänsyn till förskoleklassens roll som bryggan mellan barns informella och formella lärande beslutade projektgruppen att interventionsprogrammet skulle bygga på intentionerna i förskolans läroplan med betoning på kollektiva aktiviteter och resonemang om representationer med fokus på tal, kvantiteter och enkla räkneoperationer. Betoningen av explicit undervisning anknyter till skolans mer formella undervisningskultur med planerade lektioner. Samtidigt behålls lekfullheten som kännetecknar förskolans kultur genom aktiviteternas utformning med ramsor, rörelselekar, hemliga mönster, skattjakt etcetera.

Utprövning i fyra cykler

I det här avsnittet diskuteras lärares och forskares erfarenheter av utprövningen genom fyra iterativa cykler och exempel ges på insikter som ledde fram till revidering och förfining av den pedagogiska modellen.

Utprövningen i den första cykeln visade betydelsen av att välja de konkreta objekt som ska användas i undervisningen med omsorg. I en aktivitet förväntades barnen undersöka och resonera om hur man kan flytta gosedjur mellan avgränsade mängder, för att göra dessa mängder ekvivalenta. Läraren upplevde att aktiviteten inte alls fungerade eftersom barnens uppmärksamhet var riktad mot leksakerna som alla ville ha så många som möjligt av, och de glömde helt bort att lösa uppgiften. Senare befanns detta fenomen vara beskrivet i forskningslitteraturen (DeLoache, 2000). Ju mer barnen lockas av de fysiska attributen för representationen, desto svårare verkar det vara att uppmärksamma den symboliska informationen, och att hålla fast vid den. Detta relaterar till konkretiseringen och tillämpningen av CRA-modellen i förhållande till designprincipen om explicita strukturerade aktiviteter. För att öka möjligheten att urskilja den abstrakta strukturen inbyggd i en specifik aktivitet, bör objekten inte ha attraktiva fysiska eller emotionella attribut.

Ett problem som framkom under utprövningen i den andra cykeln var att lärarna fann det svårt att få alla barn att delta i diskussionerna, att uttrycka sina uppfattningar och att föreslå lösningar. Lärarna kände sig osäkra på hur man kan ställa öppna frågor som kan ta diskussionerna och barns tänkande vidare. I samråd med lärarna beslutades att komplettera materialet med exempel på öppna frågor som: *Vad är lika och vad är olika i dessa lösningar? Hur vet vi att vi har hittat alla lösningar? Hur tror du att Thomas tänkte när han gjorde detta mönster?* Det beslutades också att introducera en docka som ett pedagogiskt redskap. Dockan hade åtminstone tre funktioner, som alla var lika viktiga:

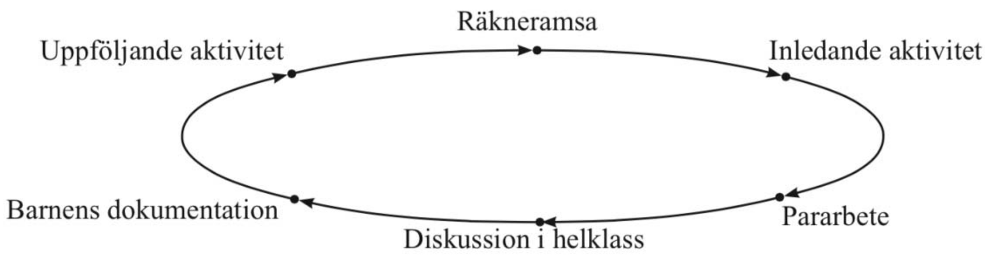
1. Barns förmåga att föreställa sig dockan som en verklig figur lockar fram lekfullheten i matematiken och det "lurar" barnen att vilja lära dockan, och därigenom uttrycka sina egna uppfattningar.
2. Dockan ställer frågor och gör uttalanden som skapar lust hos barnen att resonera om begrepp och samband mellan begrepp, komma med hypoteser, ge förklaringar och föreslå lösningar.
3. Genom att använda dockans frågor och påståenden kan läraren hjälpa barnen att rikta sin uppmärksamhet mot specifika aspekter av ett matematiskt begrepp eller en idé. En annan fördel är att läraren med dockans hjälp kan skapa kognitiva konflikter (Adey et al., 2001), det vill säga att presentera påståenden som strider mot en del av barnens uppfattningar och därför skapar grogrund för kollektiva resonemang och förklaringar. Efter den tredje fasen rapporterade lärarna att både frågorna och dockan hade en mycket positiv effekt på undervisningen.

I den fjärde fasen av utprövningen blev det uppenbart att lärarna kände sig frustrerade och osäkra på hur de skulle gå vidare med en efterföljande samling, när alla barn inte hade nått vad lärarna uppfattade som lärandemålen för den aktuella samlingen. I lärarguiden beskrivs syften med teman och aktiviteter, till exempel: *Syftet är att låta barn undersöka och resonera om sambanden mellan begreppen ett mer och ett mindre*. Lärarnas frustration bottnade i att de uppfattade aktiviteternas syften som lärandemål som alla barn skulle uppnå. De hade en idé om att avsikten med att gruppen skulle röra sig genom den konkreta-representativa-abstrakta fasen tillsammans, var att försäkra sig om att alla barn nådde specifika mål i den abstrakta fasen i slutet av en cykel. Ett exempel var när barnen dokumenterade sina erfarenheter av arbetet med tals helhet och delar och talet sju. En del barn visualiserade kombinationerna genom att göra teckningar med konkreta objekt i två färger i olika kombinationer. Andra barn ritade kombinationer genom att använda prickmönster och ytterligare andra använde matematiska symboler för att representera kombinationer såsom 7 0 och 6 1, med ett tomrum mellan siffrorna för varje kombination. Problemet tycktes vara att en del barn föredrog att använda siffersymboler som hörde till den abstrakta fasen av CRA-modellen, när de förväntades att använda ikoner såsom prickar och streck i den representativa fasen. Problemet som lärarna uppfattade det var att barnen inte nådde specifika mål samtidigt och att en del barn spontant använde abstrakta symboler i den representativa fasen. Lärarna menade att det inte var försvarbart att säga till barnen att de måste vänta till den abstrakta fasen, innan de kunde använda matematiska symboler.

I diskussioner med lärarna betonades att lärarens roll inte var att försäkra sig om att alla barn nådde ett specifikt mål samtidigt. Istället var deras primära roll att se till att alla barns representationer diskuterades i relation till kamraternas representationer. Synen på tal som polysemiska och att olika representationer och översättningar mellan representationer spelar en viktig roll i problemlösning och lärande i matematik, innebär att barnens olika uppfattningar och sätt att uttrycka sig om de begrepp som var i fokus blev en tillgång i diskussionen, och ett viktigt bidrag till den samlade bilden av aktuella begrepp. Detta oavsett om en representation var av mer konkret eller mer abstrakt karaktär. I diskussioner med lärarna betonades också att relationerna mellan de matematiska temana innebar att begrepp som barnen mötte i ett tema återkom i andra teman, med olika representationer och på olika nivåer av komplexitet.

Resultat

Studiens resultat består dels av det konkreta pedagogiska programmet, och dels av de utvecklade principer som programmet kan sägas vila på, dvs den pedagogiska modellen. Nedan presenteras en översikt av det konkreta programmet. Detta utgörs av en sekvens av aktiviteter grupperade i fem teman som beskrivits tidigare. Varje aktivitet består av en cykel med sex moment.



Figur 1 Undervisning i sex faser

Skillnaden mellan denna modell och CRA:s linjära modell är att den tydligare visar att lärande är en pågående process. När barnen tillsammans med läraren har kommit till den sista fasen i cykeln fortsätter processen även om alla barn inte nått ett specifikt mål. Vid design av aktiviteter som används i en intervention är det betydelsefullt att alla begrepp är väl representerade och att varje barn får erfarenheter av en rad specifika aktiviteter. Barn måste få utforska, använda och resonera om matematiska begrepp och idéer många gånger i olika kontexter. Begrepp som ingår i det pedagogiska programmet återkommer i flera teman med olika representationer och med olika grad av komplexitet. De sex faserna i varje cykel innefattar kollektivt arbete i helklass, i smågrupper och i par, samt barnens individuella dokumentation.

Undervisning i sex faser

1. *Räkneramsa:* En samling börjar med att barn och lärare samlas i ring och räknar i kör, uppåt och nedåt på talraden. Räknesekvenser kodade i verbalt språk är ett betydelsefullt numeriskt redskap (Wiese, 2003). Syftet med att inkludera räkneramsor är att ge barn erfarenheter som bidrar till att de

utvecklar säkerhet i att använda räkneramsan och att undersöka och använda principer och mönster i talsystemets struktur.
Exempel: När ett barn står i mitten och pekar rytmiskt på varje person under tiden som alla räknar högt tillsammans, utgör cirkeln som barn och lärare formar själva representationen för räknandet, och enheten är varje enskild person (Freudenthal, 1991). I kombination med aktiviteter i olika teman där barn till exempel bygger och ritar femtal och jämför dessa representationer med kulradens indelning i femgrupper med motsvarande siffrors positioner på talraden (5, 10, 15…), eller när de resonerar om jämna och udda tal med stöd av konkret material, prövar barnen att strukturera det verbala räknandet på annat sätt än ett-till-ett-räkning, till exempel i femsteg.

2. *Inledande aktivitet*: Läraren introducerar den aktuella aktiviteten och man arbetar kollektivt och använder konkreta objekt såsom klossar, stickor, knappar och tärningar.
Exempel: I en av cyklerna handlar den inledande aktiviteten om att lärare och barn ska undersöka alla möjliga kombinationer av talet fem med stöd av konkreta objekt. Barnen turas om att dela upp fem objekt i två delar vilka sparas undan för undan, så att alla kombinationer är synliga och kan jämföras. När barnen inte kan hitta fler sätt att dela de fem objekten skiftas diskussionen mot hur barnen säkert kan veta, att de har funnit alla möjliga kombinationer. En annan diskussion handlar om kommutativitet, en aritmetisk princip relaterad till addition och begreppslig förståelse för att ordningen mellan de ingående delarna inte förändrar kardinaliteten (Haidera et al., 2014). En annan aktivitet handlar om det inversa sambandet mellan addition och subtraktion. Med hjälp av konkret material kan barnen föra resonemang om relationer inom tal: Fem är lika med tre plus två, då är två plus tre också fem. Om jag har fem pennor och lånar ut tre har jag två kvar. Om jag får tillbaka mina tre pennor så har jag fem igen. Diskussionen kan skiftas mot relationer mellan tal och omvärld: Vad är lika och vad är skillnaden mellan att ha fyra bröder och en syster och att ha fyra systrar och en bror? Mellin-Olsen (1984) poängterade att om barn ska lära sig använda ett matematiskt symbolspråk så bör de få möjligheter att utveckla förståelse för innebörder bakom dessa symboler. Ett sätt att göra det är att låta barn muntligt ge uttryck för samband mellan tal och omvärld, t ex: *Jag hade fem kulor när vi började spela kula men så vann jag tre, så nu har jag åtta stycken,* eller *Katja har nio kulor och jag har fem. Hon har fyra fler än jag*. Sådana erfarenheter kan enligt

Mellin-Olsen, underlätta för barn att göra kopplingen mellan det talade språket och det matematiska symbolspråket vilket är en kritisk faktor relaterad till utvecklingen av number sense.

3. *Pararbete* eller *smågruppsarbete*: Barnen arbetar i par eller i små grupper med liknande och utvidgade aktiviteter som de gjorde i klassen tidigare, och använder andra objekt eller representationer.
Exempel: Barnen använde kuber i två färger och uppgiften är att bygga så många kombinationer som möjligt av talet fem. Varje par eller grupp har tillräckligt stort antal klossar för att kunna bygga alla möjliga kombinationer och sparar dessa på en bricka som de sedan tar med sig till den efterföljande diskussionen, som sker i helklass. Under pararbetet försöker lärare lyssna in barnens resonemang och fånga upp tankar och idéer så att läraren är väl förberedd inför diskussionerna i helklass (Stein et al., 2008).

4. *Diskussion i helklass*: Barn och lärare samlas för gemensam diskussion om pararbetet. Man kan förvänta sig stora skillnader i barnens konstruktioner.
Exempel: En del barn har byggt olika kombinationer på måfå, medan andra bygger strukturerat till exempel 0 gröna + 5 gula, 1 grön + 4 gula etcetera. Skillnader och likheter mellan konstruktionerna diskuteras och även skillnader och likheter mellan att använda kuber i två färger som går att bygga ihop, jämfört med att som tidigare använda lösa objekt.

5. *Barnens dokumentation*: Barnen ritar och dokumenterar individuellt vad de har gjort så långt. Teckningarna är nya representationer som utgör basen för fortsatta kollektiva aktiviteter och diskussioner med lärare och kamrater.
Exempel: I de individuella teckningarna väljer barnen att rita bilder, prickar, streck, siffror eller andra representationer som stöd för tänkande.

6. *Uppföljande aktivitet*: Denna aktivitet är återigen kollektiv och barnens teckningar är utgångspunkten för resonemang om de begrepp de har arbetat med, om sambanden och likheter och skillnader mellan representationerna av dessa begrepp.
Exempel: Barnens teckningar sätts upp på väggen och diskussionen handlar om likheter och skillnader mellan olika representationer. Barnen föreslår vilka representationer som kan grupperas tillsammans och läraren uppmuntrar barnen att motivera sina förslag och hjälper barnen att skapa matematiska

samband. Diskussioner förs om vilken information barnen uppfattar i olika representationer. På vad sätt skiljer sig representationer med matematiska symboler från representationer med prickar eller avbildade klossar? På vad sätt är de lika? Hur är de relaterade till varandra? Några barn i vårt exempel ritade kombinationerna systematiskt som en "trappa" i två färger. Läraren använder dockan som ber barnen förklara konstruktionen, och resonemanget förs om vad det innebär att omgruppera tal och klossar systematiskt. Man tar inte bort något och lägger inte till något. Ökar man med en av den ena färgen och minskar med en av den andra färgen så framträder ett tydligt mönster. I en senare aktivitet skriver läraren alla kombinationer för talet fem med matematiska symboler (5 = 5 + 0, 5 = 4 + 1 etcetera) och gruppen resonerar om likheter och skillnader mellan denna representation med matematiska symboler och barnens tidigare representationer av talkombinationer.

Genom arbetet med dessa faser konkretiseras och tillämpas CRA-modellen där barn och lärare initialt arbetar med konkreta objekt följt av barnens visuella representationer. Det sätt som CRA-modellen konkretiseras och tillämpas på i de sex faserna avser att samspela med den tredje designprincipen, det vill säga principen om resonemang och social interaktion.

Diskussion

Det övergripande syftet med Studie I var att designa och pröva ut en matematisk pedagogisk modell för förskoleklassens undervisning i matematik, baserad på teoretiska principer om explicit, strukturerad undervisning och kollektiva resonemang med fokus på tal, kvantiteter och enkla räkneoperationer (Sterner et al., 2014). Forskningsfrågan för denna studie var: Är det möjligt att kombinera dessa principer till ett funktionellt pedagogiskt program och hur kan ett sådant program i så fall beskrivas?

Baserad på en litteraturöversikt, förskolans och skolans styrdokument och beprövad erfarenhet, identifierades fem matematiska teman och resonemang om representationer som kärnan i undervisning och lärande med fokus på utvecklingen av number sense före den formella skolstarten. Med utgångspunkt i forskning om design av matematisk intervention formulerades tre designprinciper avsedda att stödja undervisningen i matematik i förskoleklass. Den första principen var att barnen ska möta en strukturerad sekvens av aktiviteter (Sarama & Clement, 2009), den andra principen att undervisningen skulle vara explicit och bygga på CRA-modellen (Witzell et al., 2003) och slutligen var den tredje principen att barnens dokumentation (teckningar) och kollektiva resonemang om sina arbeten, skulle vara det huvudsakliga redskapet för lärande (Brooks 2005; 2009).

I den modifierade undersökande modellen av CRA som har använts i denna studie, innefattar lärarrollen att leda undervisningen och att arbeta tillsammans med barnen genom en undersökande ansats. Karakteristiskt för en undersökande ansats är bland annat fokus på problemlösning och resonemang, att aktiviteter ska leda till undersökningar och att använda matematik, och att läraren är mån om att ta in barnens uppfattningar i lärprocessen (Baroody, Cibulskis, Lai & Li, 2009b). Uppfattningen att barnens tankar och idéer är en betydelsefull del i lärprocessen överensstämmer med det teoretiska perspektiv som interventionen är baserad på. Resonemang om barnens representationer och hur de relaterar till kamraternas representationer är det huvudsakliga redskapet för lärande.

Den första utprövningen bidrog till att göra beskrivningen av aktiviteterna mer detaljerad när det gäller vilka objekt som är lämpliga att använda för att öka möjligheterna för barn att uppmärksamma de underliggande abstrakta strukturerna i aktiviteten. De andra och tredje utprövningarna ledde till att lärarguiden kompletterades med mer detaljerade instruktioner, redskap och rutiner för att stödja resonemang i undervisningen. Dessa förändringar rörde konkretiseringen och tillämpningen av CRA-modellen och designprincipen på resonemang om representationer i förskoleklassen.

Upptäckten i den fjärde fasen var av ett annat slag. Som påpekats tidigare har den pedagogiska modellen som används i denna studie likheter med idé om lärandebanor som ofta innefattar individuella lärandemål (Simon, 1995). Förutom en strukturerad design bygger denna modell på samlingar som involverar kollektiva resonemang om barns individuella representationer av kollektivt erfarna aktiviteter. Utprövningarna visade att lärarnas uppfattningar om sekvenserade lärandemål knutna till dessa samlingar, skapade en konflikt med idén om kollektivt arbete. I samverkan med lärarna gjordes ett klargörande om att se varje samling som ett tillfälle att göra en viss typ av erfarenhet. Sammantaget knyter detta ihop modellens tre designprinciper. I huvudsak placeras principen om att barnen ska ges möjligheter att resonera om sina representationer av aktiviteter och begrepp som de har arbetat med, över förskoleklasslärarnas idé om att varje cykel ska innebära att alla barn når den abstrakta fasen. På grund av betoningen av kollektiva resonemang kommer även de barn som inte själva når den abstrakta nivån i en viss cykel, att vara del av diskussionen där abstrakta idéer är representerade. Dessutom innebär sekvenseringen av aktiviteter, att samma begrepp återkommer i andra aktiviteter och teman, vilket gör att barnen har flera möjligheter att nå den abstrakta nivån. Lärande är inte "one chance only" (Bransford et al., 2006). Ett ytterligare resultat av designforskningen är det pedagogiska program som idag finns tillgängligt i en utvidgad version, som stöd för förskoleklassens undervisning i number sense (Sterner et al., 2014).

Tidslinje

Här beskrivs hur utprövningen av det matematiska pedagogiska programmet har skett över tid i fyra iterativa faser mellan september 2010 och december 2013. I samband med utprövningen i den fjärde fasen genomfördes den matematiska intervention som rapporteras i Studie II. Den tidslinje som beskrivs här gäller enbart arbetet med design och utprövning av det matematiska pedagogiska programmet.

September - december 2010

- Projektgruppen vid Ncm träffas kontinuerligt en gång per månad under hösten.
- Litteraturöversikt genomförs. Den uppdateras kontinuerligt av projektedaren genom hela projektet.
- Design av matematiska aktiviteter genomförs. Teoretiska och förklarande texter skapas.
- Sex förskoleklasslärare och deras tre klasser rekryteras inför den första utprövningen med start våren 2011.
- Planering av det övergripande innehållet i kompetensutvecklingen för medverkande förskoleklasslärare genomförs.

- Möte sker med projektledaren och medverkande förskoleklasslärare för närmare information om projektets bakgrund, syfte och innehåll.

Januari - juni 2011

- Projektgruppen träffas kontinuerligt en gång per månad under våren för att följa upp arbetet och planera för vad som behöver göras på kort och på lång sikt.
- Kompetensutveckling av medverkande förskoleklasslärare sker vid sju seminarier från och med mitten av januari till början av juni. Projektledaren och förskoleklasslärarna träffas ungefär var tredje vecka och utprövningen av aktiviteterna sker mellan seminarieträffarna.
- Vårdnadshavare lämnar sitt samtycke till att barnen fotograferas och att dessa foton får användas i samband med föreläsningar och färdigställandet av den lärarguide som kommer att utgöra ett resultat av projektet.
- Projektledaren och ytterligare två medlemmar ur projektgruppen besöker medverkande förskoleklasser för observation och samtal med barn och lärare om hur undervisningen med det matematiska pedagogiska programmet genomförs och uppfattas.
- Förskoleklasslärarna dokumenterar kontinuerligt erfarenheter av arbetet med aktiviteterna i text, med foton och med exempel på barnens dokumentationer. Materialet lämnas efter hand till projektledaren.
- Revidering av det matematiska pedagogiska programmet genomförs efter hand som utprövningen fortskrider.
- En ny grupp förskoleklasslärare och deras barngrupper rekryteras inför kommande utprövning som sker hösten 2011.

Augusti 2011 - juni 2012

Den andra utprövningen påbörjas. I allt väsentligt sker denna utprövning på samma sätt som den första. Inför den tredje utprövningen rekryteras åtta nya förskoleklasslärare och deras fem klasser. Besök görs som tidigare i samtliga medverkande klasser i båda utprövningarna.

August i- december 2012

- Projektledaren påbörjar utbildningen inom forskarskolan CUL.

- Det matematiska pedagogiska programmet revideras i enlighet med resultaten av vårens utprövning.
- En utprövningsupplaga av programmet lämnas till kollegorna i Umeå som ska använda programmet som utgångspunkt i sitt forskningsprojekt. Erfarenheter av denna utprövning kommer att delges projektledaren.
- Rekrytering av de förskoleklasslärare som ska medverka i den fjärde utprövningen genomförs.
- Ett första seminarium hålls med projektledaren och de åtta förskoleklasslärare som medverkar i den fjärde utprövningen.

Januari - juni 2013

- Det andra seminariet hålls i januari innan den matematiska interventionen har påbörjats och följs sedan av ytterligare fem seminarier under februari - maj 2013.
- Utprövningen av aktiviteterna sker mellan seminarieträffarna under februari - maj 2013.
- Vårdnadshavare lämnar sitt samtycke till att barnen fotograferas och att dessa foton får användas i samband med föreläsningar och färdigställandet av den lärarguide som kommer att utgöra ett resultat av projektet.
- Förskoleklasslärarna dokumenterar kontinuerligt erfarenheter av arbetet med aktiviteterna i text, med foton och med exempel på barnens dokumentationer. Material lämnas efter hand till projektledaren.
- Projektledaren besöker medverkande förskoleklasser för observation och samtal med barn och lärare om hur undervisningen med det matematiska pedagogiska programmet genomförs och uppfattas.
- Utprövningen och kompetensutvecklingen avslutas i maj 2013.

Augusti - december 2013

- Revidering av det matematiska pedagogiska programmet genomförs i enlighet med resultatet av den fjärde utprövningen.

Tillförlitlighet

En designstudies kvalitet innefattar objektivitet, trovärdighet, överförbarhet och pålitlighet (McKenney & Reeves, 2012). Objektivitet avser i vilken utsträckning studien är formad av respondenterna och att den inte snedvrids genom forskarens egen motivation eller egenintresse. I föreliggande studie kan detta hot sägas ha motverkats genom den öppna kontinuerliga dialog med förkoleklasslärarna som projektledaren haft genom klassrumsbesök och framför allt genom de gemensamma seminarierna. Det har naturligt också funnits en öppen dialog med handledarna för studien vilka är väl insatta i studiens alla data och studiens genomförande. Studiens trovärdighet handlar om resultatens sanning. I denna uppsats har avsikten varit att tillgodose detta krav genom att beskriva hur urvalet datainsamlingen och forskningsprocessen har gått till. Överförbarhet handlar om huruvida resultaten kan vara tillämpbara i andra kontexter. Pålitlighet motsvaras av begreppet reliabilitet och visar om resultaten är konsistenta och om de kan upprepas av andra forskare, vilket kan möjliggöras genom tjocka beskrivningar. Dessa aspekter av studiens tillförlitlighet har beaktats genom hela studien.

Studie II: Intervention i matematik i förskoleklass

Studie II hade tre syften. Det första och övergripande syftet var att implementera och utvärdera effekterna av en tio veckors interventionsstudie i matematik i förskoleklass med fokus på tal, resonemang och representationer. Det andra syftet var att undersöka i vilken mån initiala resultat vad gäller arbetsminne predicerar framgång i interventionen. Det tredje syftet var att undersöka i vilken mån grammatisk språkförståelse predicerar framgång i interventionen.

Deltagare och procedur

I Studie II deltog tolv förskoleklasser som rekryterades från nio skolor i en västsvensk stad. Efter att informerat samtycke hade inhämtats från barnens vårdnadshavare, fördelades klasserna genom ett randomiseringsförfarande till kontrollgrupp respektive experimentgrupp. Två lottningsförfaranden genomfördes. 1) De tolv förskoleklasserna lottades slumpmässigt till experimentgrupp eller kontrollgrupp, 2) inom varje förskoleklass lottades barnen så att alla barn deltog i undervisningen, men endast hälften av dem testades och deltog därmed i studien. Sammanlagt deltog 124 barn i studien av vilka 62 barn ingick i experimentgruppen (34 pojkar och 28 flickor) och 62 barn ingick i kontrollgruppen (38 pojkar och 24 flickor). Barnens ålder varierade från 6 år 0 månader till 7 år 1 månad (M = 6 år 5 månader; SD = 3,3 månader) vid tiden för pretestet. Pretest och posttest genomfördes individuellt och den totala testtiden var cirka 60 minuter vid pretestet och 30 minuter vid posttestet. Ett uppföljningstest genomfördes nio månader senare i grupper om 4 - 5 elever och testtiden var cirka 40 minuter. Testen genomfördes på barnens egna skolor i ett avskilt tyst rum. Två speciallärare och projektledaren genomförde testen. Speciallärarna erhöll utbildning på testens innehåll och genomförande för att säkerställa att testningen skedde på ett så enhetligt sätt som möjligt.

Den matematiska interventionen

Experimentgruppen erhöll 30 minuter daglig matematikundervisning under tio veckor. Det pedagogiska programmet, baserat på aktuell forskning om barns utveckling av number sense, innehåller aktiviteter med fokus på tal, resonemang och representationer, och är utvecklat för barn i förskoleklass (Sterner et al., 2014). Experimentgruppen erhöll ingen ytterligare matematikundervisning utöver den matematiska interventionen. Kontrollgruppen erhöll 30 minuter daglig undervisning i fonologisk medvetenhet under tio veckor. Undervisningsmaterialet är teoretiskt välförankrat (Lundberg, Frost & Petersen, 1988) och är vanligt förekommande i förskoleklassen. Kontrollgruppen erhöll ingen ytterligare undervisning i fonologisk medvetenhet utöver den fonologiska interventionen. Effekten av den matematiska interventionen i experimentgruppen jämfördes alltså med effekten av den ordinarie matematikundervisning som erbjöds inom förskoleklassen.

Undervisningen genomfördes i båda grupperna av barnens egna lärare. Lärarna i experimentgruppen deltog i kompetensutveckling i matematik som pågick under åtta månader. Den startade två månader före implementeringen av interventionen och avslutades när interventionen var genomförd. Samtliga lärare hade tidigare deltagit i kompetensutveckling med fokus på fonologisk medvetenhet i enlighet med det program som användes i kontrollgruppen (Lundberg, 2007). Design och utprövning av det matematiska programmet som har använts i interventionen i matematik är redovisad i Studie I.

Testinstrument

Pretestet innefattar test av number sense, verbalt och visuellt arbetsminne samt grammatisk språkförståelse. På grund av tidsbegränsning deltog endast hälften av barnen på testet av grammatisk språklig förståelse. Genom randomisering har barnen slumpmässigt utsetts att delta eller inte delta. Det innebär att 30 barn från experimentgruppen och 30 barn från kontrollgruppen genomförde det grammatiska språkliga testet. Vid posttestet genomfördes enbart test av number sense. Det vara samma test som genomfördes vid pretestet. Ett år efter interventionen då barnen gick i årskurs 1 genomfördes ett uppföljningstest. Det innehöll test på mer komplex number sense och basal aritmetik samt test av läsförståelse.

Test inkluderade endast i pretestet
Receptiv grammatisk förståelse TROG-Version 2 (Bishop, 2003). Testet innehåller 80 flervalsfrågor och avser att undersöka grammatisk språkförståelse. Testledaren läser en mening och barnets uppgift är att peka på en av fyra bilder som svarar mot innehållet i den upplästa meningen. Testet som är indelat i 20 block avbryts efter ett fel i fem på varandra följande block. Maximalt antal poäng är 80, Cronbach's alpha reliabilitet är .93.

Verbalt arbetsminne (Wolff, 2013). Testet innehåller tio uppgifter. Varje uppgift består av två delar. Testledaren säger ett ord (till exempel *tåg*) åtföljt av en enkel fråga som barnen ska svara ja eller nej på (t ex *Kan hundar skälla*?). Uppgiften är att komma ihåg ordet (t ex tåg). Antalet ord att komma ihåg ökar gradvis (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5). Testet avbryts om barnet får 0 poäng på två uppgifter i rad. Maximalt antal poäng är 60, Cronbach's alpha reliabilitet är .86.

Visuellt arbetsminne Corsi Blocks (Farrell Pagulayan et al., 2006). Testet består av nio svarta kuber monterade på en svart bräda enligt Farell et al.'s (2007) modell för standardisering. Uppgiften är att peka på samma block i samma sekvens som testledaren gör. Antalet block ökar från två till nio, med två uppgifter inom varje svårighetsgrad. Testet avbryts när barnet gör två fel på samma nivå. Maximalt antal poäng är 25, Cronbach's alpha reliabilitet är .66.

Test inkluderade i både pre- och posttest

Early Numeracy Test (ENT) (Van Luit & Van de Rijt, 2005). Testets syfte är att mäta tidiga numeriska förmågor och att identifiera barn mellan 4 till 7 år som kan vara i riskzonen för att utveckla matematiksvårigheter. ENT består av 40 uppgifter som innefattar åtta aspekter av numerisk kunskap: *jämförelse, klassificering, ett-till-ett-principen, seriering, användning av räkneord, strukturerad räkning, resultaträkning* och *generell kunskap om tal.* De första fyra aspekterna handlar om relationella förmågor, medan de fyra sistnämnda mer explicit fokuserar på räkneförmåga med en ömsesidig relation mellan de två skalorna (Aunio och Niemivirta, 2010). Barnens uppgift är att svara på frågorna muntligt eller att peka på det rätta svaret med stöd av konkret material eller bilder. Några uppgifter innebär att barnen ska använda papper och penna och dra streck mellan två bilder för att markera att dessa hör ihop. Maximalt antal poäng är 40, Cronbach's alpha reliabilitet är .85.

Ordproblem är ett delprov från *Number Sense Brief* (Jorden, Glutting & Ramani, 2010). Testet består av fem additions- och subtraktionsuppgifter inbäddade i en liten berättelse. Uppgifterna ges muntligt och utan att konkret material finns tillgängligt. Maximalt antal poäng är 5 och Cronbach's alpha reliabilitet är .67.

Test inkluderade i uppföljningstest

Deltest ur *Förstå och använda tal* (McIntosh, 2008). Testen som innefattar tio nivåer från förskoleklass till årskurs 9 har sin bakgrund i *The number sense test* (NST)och forskningsprojektet *Improving and Assessing the mental Computation of School Aged Student* (Mcintossh, 2004) och har vidareutvecklats och anpassats till det svenska skolsystemet av McIntosh (2008). Testen innefattar tre sammanlänkade aspekter av number sense: *att förstå tal, att förstå operationer med tal* och *att göra beräkningar*. I denna studie användes 21 uppgifter från nivå 1 och 2. Testledaren läser alla uppgifter för barnen som löser dem med papper och penna. Maximalt antal poäng är 21, Cronbach's alpha reliabilitet är .62.

Addition och *subtraktion* (Sterner, opublicerat). Testet innefattar 24 skriftliga additions- och subtraktionsuppgifter inom talområdet 0 till 20. Testet ges på tid och testtiden är 3 minuter. Maximalt antal poäng är 24 och test-retest reliabilitet i denna studie är .97.

Analysmetod

För att studera och analysera effekterna av interventionen användes kvantitativa data och en longitudinell design med tre mättillfällen. Både manifesta och latenta variabler ingår i analysen. Data analyserades med hjälp av modelleringsprogrammet Mplus 7 (Muthén & Muthén, 2012) och ramprogrammet STREAMS (Gustafson & Stahl, 2005).

Konfirmatorisk faktoranalys

De latenta variablerna beräknades i en konfirmatorisk faktoranalys CFA (Confirmatory Factor Analysis) utifrån samvariationen mellan flera observerade variabler. I den konfirmatoriska faktoranalysen prövades om en hypotetisk faktormodell som definierats på förhand kunde verifieras av data. En fördel med latenta variabler är att de i allmänhet kan representera de begrepp som ingår i studiens teoretiska referensram på ett mer fullödigt sätt än vad som är fallet med enstaka manifesta variabler. En annan fördel är att de saknar mätfel. Mätfel kan leda till att effekter underskattas (Gustafson, 2011).

Strukturell ekvationsmodellering

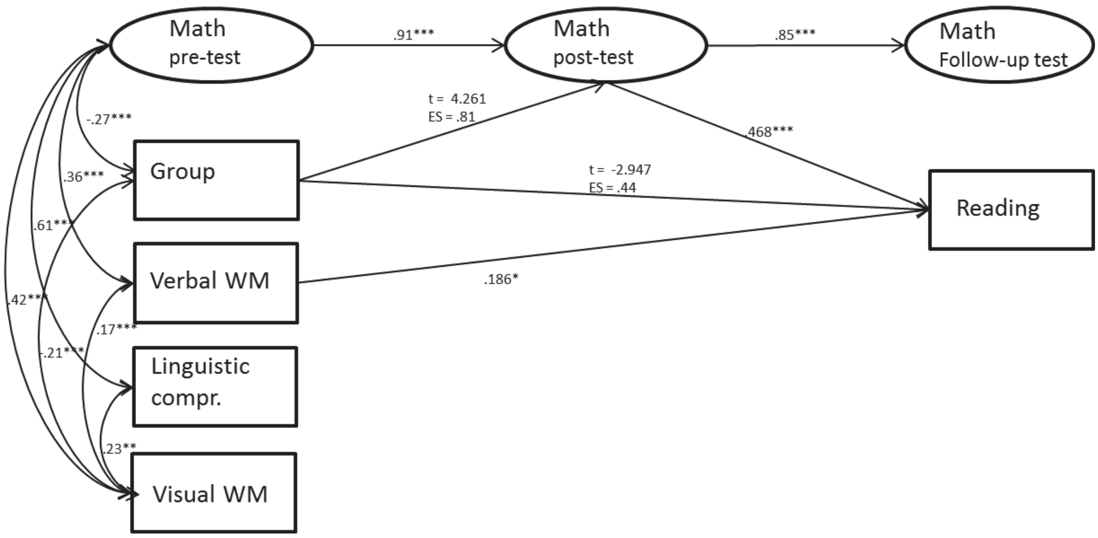
I den fortsatta analysen genomfördes strukturell ekvationsmodellering (SEM). Strukturella ekvationsmodeller är en familj av statistiska modeller som gör det möjligt att analysera både manifesta observerbara variabler, och latenta icke observerbara variabler (Gustafson, 2011). Anpassningsmått anger hur väl den modell man har konstruerat, överensstämmer med den samvariation som finns mellan de variabler som ingår i datamaterialet. Om modellen stöds av data kommer dessa inte att skilja sig signifikant från modellen. Fler än en modell kan testas för att utröna vilken modell som förklarar data bäst. Som mått på anpassningen används χ^2. Eftersom χ^2 påverkas både av små och stora urval anges även RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation) som mått på avvikelse mellan modell och data. RMSEA mäter graden av avvikelse mellan modell och data på en absolut skala, med hänsyn tagen till urvalsstorlek och till modellens komplexitet (Gustafson, 2011). För att indikera god anpassning av modellen bör RMSEA-värdet och den övre gränsen för 90 % konfidensintervall vara mindre än 0,07 (Steiger, 2007). CFI (Comparative Fit Index) är ytterligare ett anpassningsmått som ofta används liksom SRMR (Standardized Root Mean Square Residual), ett mått som ger ett standardiserat värde på den totala avvikelsen mellan den implicerade och den observerade kovariansen. Värdet för SRMR ska vara lägre än 0,08 och CFI ska ligga nära eller över 0,95 (Hu & Bentler, 1999).

I föreliggande studie går många av eleverna i samma klass eller i samma skola. För att justera för dessa klustereffekter användes Complex i Mplus. Det var också så att endast hälften av barnen deltog i testet grammatisk språkförståelse, dvs hälften av barnen hade missing på denna variabel, och därför tillämpades Missing H1 i Mplus.

Resultat

Tre faktoranalyser genomfördes; pre-, post- och uppföljningstest. Vid respektive mättillfälle fanns det tre indikatorer för den latenta matematikvariabeln. Med endast tre indikatorer innebär det att mätmodellerna är så kallat *just identified*, det vill säga modellanpassningen är ointressant då den alltid blir perfekt. De standardiserade faktorladdningarna för matematikvariablerna på pre-, post- och uppföljningstesten var samtliga högt signifikanta och varierade från 0,56 till 0,93.

I den strukturella ekvationsmodellen upprättades autoregressiva relationer mellan de latenta variablerna som indikerade matematiska förmågor vid pre-, post- och uppföljningstesten. I de fall samma indikatorer användes vid olika testtillfällen kovarierades felvarianserna över tid. Läsförståelse inkluderades som en manifest utfallsvariabel vid uppföljningstestet. En dikotom variabel, Grupp, som representerade kontrollgruppen (kodad som 0) och experimentgruppen (kodad som 1) skapades och relaterades till matematikvariablerna på post- och uppföljningstesten, och till läsförståelse på uppföljningstestet. De manifesta variablerna fonologiskt arbetsminne, visuellt arbetsminne, språklig förmåga och grupp tilläts korrelera fritt med varandra och med matematik vid pretestet. I modellen är det kontrollerat för könsskillnader, vilket inte syns i Figur 2, eftersom inga signifikanta skillnader kunde identifieras. Modellanpassningen var god (χ^2 = 95.738, df = 72; RMSEA = .051, CI90 = .014- .077; CFI = .956; SRMR = .058), men det fanns utrymme för förbättringar. Korsvisa relationer (cross lagged relations) över tid tillfördes modellen. De enda signifikanta relationerna av det slaget var från verbalt arbetsminne vid pretestet och från matematik vid posttestet till läsförståelse vid uppföljningstestet. Detta innebar en signifikant förbättring av modellen (χ^2 = 87.283, df = 70; RMSEA = .045, CI90 = .000- .072; CFI = .968; SRMR = .056), vilken presenteras i Figur 2.



Figur 2: Strukturell ekvationsmodellering

Strukturell ekvationsmodellering med autoregressiva relationer mellan matematik på pretestet, posttestet- och uppföljningstestet. De manifesta variablerna verbalt arbetsminne, grammatisk språkförståelse och visuellt arbetsminne vid pretestet ingår i modellen, liksom läsförståelse på uppföljningstestet. Grupptillhörighet, experiment- eller kontrollgrupp, är också inkluderat. De signifikanta korrelationerna mellan variablerna visas i figuren. Vi kontrollerade för kön, men eftersom det inte fanns några signifikanta samband är variabeln kön inte inkluderad i figuren. Notera: *p<.05; **p<.01; ***p<.001.

Grupp var negativt korrelerat med matematik och visuellt arbetsminne vid pretestet, det vill säga kontrollgruppen hade initialt högre resultat på dessa test. Vidare var matematik signifikant korrelerat med språklig förmåga samt visuellt och verbalt arbetsminne. Visuellt och verbalt arbetsminne var också signifikant relaterade, liksom visuellt arbetsminne och språklig förmåga. Det fanns en signifikant och stark effekt av interventionen på matematiska förmågor vid posttestet till experimentgruppens fördel ($t = 4.261$; $p < .001$; ES = .81). Det fanns dock ingen direkt effekt av interventionen på matematiska förmågor nio månader efter interventionen. Däremot fanns det en indirekt signifikant effekt av interventionen ($t = 3.978$; $p < .001$; ES = .69) på matematisk förmågor vid uppföljningstestet. Det fanns också en signifikant negativ effekt av grupptillhörighet på läsförståelse vid uppföljningstestet, det vill säga en effekt till kontrollgruppens fördel ($t = -2.947$; $p < .01$; ES = .44).

Diskussion

Det övergripande syftet med denna studie var att utvärdera effekten av en randomiserad intervention i förskoleklassen med fokus på tal och resonemang om representationer. Resultaten visar en signifikant effekt på matematik från pre- till posttest till experimentgruppens fördel. Det fanns också en bestående effekt av interventionen nio månader senare då barnen gick i årskurs 1. Ju längre effekten varar, desto effektivare kan man anta att interventionen har varit (Mononen et al., 2014). Effekten av föreliggande intervention kvarstod nio månader efter att interventionen avslutats, men växte sig inte starkare över tid. En pedagogisk implikation förefaller alltså här vara att det är viktigt att fortsätta den matematiska interventionen i årskurs 1, om än i begränsad omfattning.

På pretestet hade kontrollgruppen signifikant bättre resultat på matematiktesten. Kontrollgruppen hade även signifikant bättre resultat på test av visuellt arbetsminne. Tidigare studier (Andersson & Lyxell, 2007; McKenzie et al., 2003; Rasmussen & Bisantz, 2005) indikerar att förskolebarn i hög grad förlitar sig på analoga, mentala representationer av kvantiteter det vill säga objekt som kan manipuleras och lagras i visuella arbetsminnet. Barn i skolåldern tycks i högre grad koda och lösa muntligt presenterade problem verbalt och förlitar sig alltså mer på det verbala arbetsminnet eller en kombination av båda (se Raghubar et al., 2010). Det innebär att visuellt presenterade problem är speciellt betydelsefullt för barn före den formella skolstarten och i början av skolåldern (Rasmussen & Bisantz, 2005).

I föreliggande studie fanns ett samband mellan visuellt arbetsminne och matematik i förskoleklassen, men arbetsminnet hade inte någon effekt på senare matematiska förmågor utöver effekten av den matematiska interventionen. Detta stärker hypotesen om att visuella arbetsminnet är betydelsefullt i förskoleåldern och i tidig skolålder, men att det inte har lika stor betydelse senare.

Vid uppföljningstestet hade kontrollgruppen signifikant högre resultat än experimentgruppen på test av läsförståelse, vilket är i linje med tidigare forskning som har visat ett samband mellan intervention i fonologisk medvetenhet och ökad läsförståelse (e.g., Fälth et al., 2013; Lundberg, 1985; Wolff, 2011). Dessutom visar detta faktum att kontrollgruppen presterade bättre än experimentgruppen i läsförståelse, att den matematiska interventionen inte hade någon global effekt, utan snarare en specifik effekt på matematisk förmåga.

Det fanns inga skillnader mellan experimentgruppen och kontrollgruppen i fråga om verbalt arbetsminne och språkliga förmågor på pretestet. Barnens initiala språkliga förmågor hade inte samband med matematiska förmågor när barnen gick i årskurs 1, det vill säga det fanns inte några samband utöver effekten av interventionen och den autoregressiva effekten av matematik. Initiala språkliga förmågor hade inte heller samband med läsförståelse i årskurs 1. Däremot kunde verbalt arbetsminne på pretestet predicera läsförståelse nio månader senare. Detta resultat måste tolkas med försiktighet, men skulle kunna indikera att barn med initialt hög verbal arbetsminneskapacitet har en fördel vad gäller läsförståelse. Det fanns en signifikant effekt av matematiska förmågor vid posttestet på läsförståelse ett år senare. Det indikerar att förmåga att förbättra sin matematiska kompetens kan predicera senare läsförståelse.

Implementeringen av interventionen

Förskoleklasslärarna i både kontrollgrupp och experimentgrupp förde dagliga journalblad som innefattade korta kommentarer om undervisningen. Experimentgruppen dokumenterade dessutom undervisningen med tjockare beskrivningar i form av foton, beskrivande texter och barnens egna dokumentationer. Projektledarens klassrumsbesök i både experimentgrupp och kontrollgrupp indikerar att interventionerna genomfördes enligt forskningsplanen. Experimentgruppens lärare deltog i kompetensutveckling vid sju seminarier som startade två månader före interventionen och som pågick under hela interventionen. Anteckningar fördes vid samtliga seminarier och återkopplades vid nästkommande seminarium. Lärarna uppmuntrades att vid behov söka kontakt med mig som projektledare mellan seminarierna som hölls med cirka en månads mellanrum. Projektledaren gjorde klassrumsbesök i både kontrollgrupp och experimentgrupp. Erfarenheterna från dessa insatser tyder sammantaget på *fidelity,* det vill säga att interventionen i båda grupperna genomfördes i enlighet med programmet.

Konstruktvaliditet är ett centralt redskap för att koppla de operationer som används i en intervention till relevant teori och till de språkgemenskaper som kommer att använda studiens resultat. Det finns framför allt två komplikationer med konstruktvaliditet. Det ena är hur vi förstår, kategoriserar och benämner aktuella begrepp och det andra hur vi kan utveckla test som faktiskt mäter dessa begrepp. Ett hot mot konstruktvaliditet är inadekvata förklaringar av ett begrepp vilket kan leda till felaktiga inferenser om sambanden mellan operation och begrepp. I föreliggande studie har en omfattande genomgång av aktuell forskning om utvecklingen av number sense bidragit till att tydliggöra relevanta begrepp kopplat till den teoretiska referensramen för studien.

Ett möjligt hot mot validiteten är kompensatorisk rivalitet. Kontrollgruppens lärare kan vilja kompensera för att deras barn inte ingår i experimentgruppen, eller för att lärarna själva inte fick den kompetensutveckling som experimentgruppens lärare fick. Kontrollgruppens lärare hade ett möte tillsammans med mig före interventionen för information om interventionen i fonologisk medvetenhet. Redan före randomiseringen av klasserna till experiment- respektive kontrollgrupp, utlovades viss kompetensutveckling i matematik till kontrollgruppens lärare efter att interventionen var genomförd. Denna kompetensutveckling gavs vid två seminarier. I samband med detta erhöll lärarna det matematiska pedagogiska programmet. Ingenting i samtalen under dessa dagar tyder på kompensatorisk rivalitet.

En betydelsefull aspekt av föreliggande studie är den randomiserade fördelningen till experimentgrupp och kontrollgrupp. Utan kontrollgrupp finns risk att resultaten påverkas av *regression to the mean*. Ytterligare ett hot mot validiteten och ett skäl att ha kontrollgrupp är med hänsyn till Hawthorneffekten och till att barnen kan bli vana vid testsituationer och de återkommande testen, vilket kan göra att resultaten förbättras av bara den anledningen.

Testens validitet och reliabilitet

De matematiktest som har använts vid pre- och posttest är *Early Numeary Test* (ENT)(Van Luit & Van de Rijt, 2005) samt fem ordproblem *ur Number Sense Brief* (NSB) (Jordan, et al., 2010). ENT är en valid och reliabel metod för att undersöka number sense bland förskolebarn fyra och ett halvt år till sju och ett halvt år gamla (Aunio et al., 2005; Van de Rijt et al., 2003). Resultat av test med ENT i förskoleklass visar att det har ett högt predikativt värde på resultat av ENT i årskurs 1 (Aunio & Niemvirta, 2010; Navarro et al., 2012). ENT innefattar två skalor, relationella förmågor och räkneförmågor med ett reciprokt samband dem emellan (Aunio and Niemivirta, 2010). NSB är utvecklat med stöd av Rasch-analys och har god validitet och predikativ validitet (Jordan, et al., 2010). Vid uppföljningstestet användes taluppfattningstest ur *Förstå och använda tal* (McIntosh, 2008). Test på addition och subtraktion (Sterner, opublicerat) innefattar 12 skriftliga additionsuppgifter och 12 skriftliga subtraktionsuppgifter inom talområde 0 - 20.

Samtliga ingående test, utom två, visar god reliabilitet, antingen genom Cronbach's alpha eller test-retest. De två test som har en låg reliabilitet är Corsi blocks och test ur Förstå och använda tal. Den låga reliabiliteten i Corsi blocks kan ha lett till att samband har underskattats och inte upptäckts. Vad gäller test ur Förstå och använda tal är den lägre reliabiliteten mindre problematisk eftersom detta test ingick i en latent variabel där mätfel hålls utanför.

Kapitel 4 Övergripande diskussion

Denna licentiatuppsats har två sammanlänkande syften. Ett syfte var att designa och pröva ut ett pedagogiskt program för förskoleklassen med fokus på tal, resonemang och representationer. Ett annat syfte var att implementera och utvärdera effekten av en randomiserad kontrollerad matematisk intervention i förskoleklass, med ovan beskrivna pedagogiska program som stöd för undervisningen.

Huvudresultatet av Studie I är att strukturerad, explicit undervisning med utgångspunkt i CRA-modellen är möjlig att kombinera med en tydlig betoning på kollektivt arbete och resonemang. Detta är ett icke-trivialt resultat givet att lärarna i den fjärde fasen av utprövningen av den pedagogiska modellen, erfor att principen om kollektivt arbete och resonemang om representationer inte fungerade bra tillsammans med den abstrakta fasen av CRA. Detta ledde till viss omprövning av den pedagogiska modellen till den slutgiltiga versionen som sedan utvärderades i Studie II. Det poängterades att lärarnas huvuduppgift var att barnen ska ges möjligheter att resonera om sina representationer av aktiviteter och begrepp som de har arbetat med, och att uppföljningen av varje aktivitet därmed inte skulle ses som ett tillfälle att utvärdera att varje barn hade nått den abstrakta fasen av CRA. Även ett antal andra förändringar avsedda att stödja lärarnas möjligheter att med utgångspunkt i de föreslagna aktiviteterna föra matematiskt relevanta resonemang med barnen genomfördes.

Huvudresultatet i Studie II visar att det fanns en signifikant effekt på barnens matematikkunnande vid posttestet till experimentgruppens fördel. Det fanns också en bestående indirekt effekt av interventionen nio månader senare, då barnen gick i årskurs 1. Sammantaget betyder det att den pedagogiska modellen med fokus på resonemang och representationer för undervisning av number sense i förskoleklassen, kunde realiseras som ett pedagogiskt program som hade positiv effekt på barnens matematikkunnande.

Även om de två studierna som arbetet baseras på bygger på samma teori och forskning när det gäller number sense, så representerar de metodologiskt olika inriktningar. Studie I utnyttjar en kvalitativ metod där avsikten är att förstå och förbättra funktionen hos den pedagogiska modellen, i relation till hur den fungerar för undervisning och lärande. Studie II baseras på en kontrollerad och randomiserad studie med experimentgrupp och aktiv kontrollgrupp och där det används kvantitativa statistiska metoder för att etablera samband mellan olika uppmätta variabler. Genom att kombinera dessa två metodologiska ansatser, skapas möjlighet att både få den detaljerade informationen om programmets funktion i praktiken som är nödvändig för att förstå hur programmet skall kunna utvecklas, samt att få mer objektiv evidens för att programmet fungerar. Carpenter et al. (2004) har påpekat att uppfattningen att lärande sker i kulturella praktiker inte behöver stå i motsättning till ett perspektiv på lärande som är baserat på kognitiv forskning. Istället kan det vara en styrka i att förena de två perspektiven och på så sätt dra nytta av båda. Att som i denna studie testa pedagogiska modeller med hjälp av randomiserade interventionsstudier är ovanligt inom det matematikdidaktiska området, och ingen av de senaste årens svenska avhandlingar med inriktning mot lärande och undervisning i matematik har utnyttjat en liknande metod.

De två studierna kan också kopplas ihop på andra sätt. Den pedagogiska modellen bygger på resonemang och representationer. En utgångspunkt är då att, att resonera om och representera matematiska fenomen inte bara är en form av matematikkunnande i sig, utan också ett sätt att lära sig matematik. När barnens matematikkunnande testades i samband med Studie II, användes etablerade tester som inte i första hand fokuserar på resonemang och representationer, utan snarare är vad man kan kalla traditionella matematiktest. Det innebär att det har varit en transfer från den matematiska interventionen till den traditionella skolmatemtiken. Resultaten från Studie II visar alltså att undervisning fokuserad på resonemang och representationer har potential att utveckla elevers kunnande i den mening som det mäts med sådana traditionella test.

Undervisningens betoning på kollektiva resonemang om barns dokumentationer (teckningar) är grundad i Vygotskys teorier (1978; 2004; 2012) och har stöd i empiriska studier (Brooks, 2005; 2009). Enligt dessa teorier kan man säga att det är förväntat att undervisning av detta slag är ett effektivt sätt att lära sig matematik. Men man kan också koppla den pedagogiska modellen till resultat från den kognitiva forskningen. Forskning om arbetsminnets bidrag till olika områden av matematiskt arbete indikerar att barn före skolåldern, i hög grad förlitar sig på det visuella arbetsminnet i samband med muntligt presenterade problem (Kyttälä et al., 2014; Rasmussen & Bisanz, 2005). I den aktuella studien har barn och lärare med stöd av representationer såsom klossar, teckningar, ikoner, siffror, talrader, muntligt och skriftligt språk, resonerat om matematiska begrepp och deras samband. Resultaten av studien indikerar att denna pedagogiska metod kan vara framgångsrik för utvecklingen av number sense i allmänhet, men också med hänsyn till när det visuella arbetsminnets resurser är begränsade. En bidragande orsak till den positiva effekt som interventionen hade från pretest till posttest, trots att kontrollgruppen hade signifikant bättre resultat på visuella arbetsminnet vid pretestet, skulle alltså kunna vara det stöd för arbetsminnet som undervisningens fokus på användningen av representationer innebar. En ytterligare hypotes är att undervisningens fokus på barnens resonemang, det vill säga att verbalisera de matematiska fenomen som undervisningen handlar om, kan vara ett stöd för lärande. När elever i grundskolan fick möjligheter att verbalisera sina tankar och strategier och genom att skriva och illustrera de strategier som de använde, gav det genomgående goda effekter på elevernas lärande (Gersten et al., 2009). En hypotes som forskarna för fram är att verbalisering dels hjälper eleverna att hålla fokus på problemets innehåll, dels bidrar till en bättre matematisk förståelse. Bättre matematisk förståelse kan i sin tur leda till att djupare minnen skapas (Klingberg, 2011).

Samband mellan matematik och läsning har dokumenterats i tidigare studier (t ex Duncan et al., 2007; Durham et al., 2007; Gustafson et al., 2013; Jordan et al., 2003; Lerkkanen, Rasku-Puttonen, Aunola & Nurmi, 2005; Lie Reikerås, 2007), men sambandets riktning är oklar. I föreliggande studie predicerade förbättring av matematikkunnande i förskoleklass, läsförståelse i årskurs 1. Studiens design kan bidra till att förklara riktningen på sambandet från matematik till läsning. Interventionens fokus på kollektiva aktiviteter och resonemang, innebär att barnen har arbetat både med muntlig förståelse och med språklig uttrycksförmåga. En möjlig förklaring skulle kunna vara att förmågan till uppmärksamhet förbättras när man deltar i intellektuellt arbete och undervisning. Detta är i linje med resultaten av en longitudinell studie i årskurs 3 och 4 (Lundberg & Sterner, 2006), som indikerar ett kausalt samband mellan uppgiftsorientering och läsförståelse och aritmetik. De förmodar att uppgiftsorientering i viss mån är en avgörande faktor för skolframgång och att det finns ett reciprokt samband. I beaktande av likheterna mellan interventionerna i matematik och läsning i föreliggande studie, och med hänsyn till graden av struktur av explicit undervisning, lärares stöttning och betoningen på barnens delaktighet i lärprocessen, är det rimligt att anta att denna pedagogiska inriktning har förbättrat barnens förmåga till uppgiftsorientering. Detta kan i sin tur ha påverkat både matematiska förmågor och läsförståelse. Det skulle kunna vara en förklaring till relationen mellan att förbättra sina matematiska kunskaper vid posttestet och att prestera bra på läsförståelse nio månader senare.

Vid uppföljningstestet hade kontrollgruppen signifikant högre resultat än experimentgruppen på test av läsförståelse. Det fanns inga mått på barnens läsförståelse vid pretest, men tidigare forskning har visat ett samband mellan intervention i fonologisk medvetenhet och läsförståelse (Fälth et al., 2013; Lundberg, 1985; Wolff, 2011). Med beaktande av att det inte fanns några skillnader mellan grupperna vad gäller språklig grammatisk förmåga eller verbalt arbetsminne vid pretest, kan man anta att den signifikanta skillnaden mellan grupperna i läsförståelse som visade sig vid uppföljningstestet, kan tillskrivas interventionen i fonologisk medvetenhet. Kontrollgruppens relativa förbättring inom läsområdet och interventionsgruppens relativa förbättring inom matematikområdet indikerar alltså att den undervisning som givits i båda fallen har ämnesspecifika effekter snarare än globala effekter. I relation till detta är det dock intressant att notera att vi också kan se i modellen att förbättringar i matematik svarar mot bättre resultat i läsförståelse för båda grupperna.

Ett medvetet val i denna studie är att det är förskoleklasslärarna som har implementerat interventionen. I den modifierade undersökande modellen av CRA som har använts i denna studie, innefattar lärarrollen att leda undervisningen och att arbeta tillsammans med barnen genom en undersökande ansats. Karakteristiskt för en undersökande ansats är bland annat fokus på problemlösning och resonemang, att aktiviteter ska leda till undersökningar och att använda matematik, och att läraren är mån om att ta in barnens uppfattningar i lärprocessen (Baroody et al, 2009b). Uppfattningen att barnens tankar och idéer måste involveras i lärprocessen är en fundamental aspekt i synen på lärande som förs fram i denna uppsats. Undervisningen bygger i hög grad på kollektivt arbete och kommunikation i helklass. Detta val är baserat på två saker. Det ena är förskoleklassens roll som bryggan mellan det informella lärande som ofta sker i förskolan och det mer formella lärande som tar vid i skolan (Skolverket, 2010). Det andra skälet har en teoretisk bakgrund baserad på Vygotskys teori och dess fokus på språk och interaktion som huvudsaklig källa till lärande och utveckling (Vygotsky, 1978). På en mer detaljerad nivå och i linje med idéer i CRA, argumenterar Brooks (2005; 2009) för att när barns dokumentation används i kollektiva och kommunikativa sammanhang existerar de på en interpersonell nivå. I föreliggande studies design fungerar kollektivt arbete i helklass, i smågrupper eller i par, som aktiviteter på en social nivå, medan barnens dokumentation även fungerar på en individuell nivå, som kopplar tillbaka till tidigare kollektiva erfarenheter i helklass och i pararbete.

Ett ytterligare skäl till att se barnens resonemang om representationer som det huvudsakliga redskapet för lärande är att matematiska objekt är polysemiska, det vill säga att för varje tal finns det flera representationer (Winsløv, 2004). En av de ofta uppmärksammade stötestenarna i utvecklingen av number sense som forskningen lyfter fram, är hur kopplingar mellan barns informella och formella uppfattningar och mellan icke-symboliskt och symboliskt tänkande kan främjas genom undervisning, och bristen på sådana kopplingar kan bidra till svårigheter (Jordan, 2007; Perpura et al., 2013). I kombination med uppfattningen att matematik handlar om samband och relationer och att det är översättningar mellan representationer och transformationen inom representationer som är väsentliga för begreppslig förståelse (Kilpatrick et al., 2001), kan undervisning med fokus på barns och lärares resonemang om representationer vara ett framgångsrikt sätt att möta denna utmaning. Detta knyter an till Masons (1996) betoning på att undervisningen bör syfta till att barnen kan upptäcka det generella genom det specifika, och det specifika i det generella. När barn med lärarens stöd får resonera om sina representationer och relatera dem till andra mer abstrakta eller mer konkreta representationer för samma matematiska innehåll, kan barnens matematikkunnande utvecklas och fördjupas. Eftersom tal är polysemiska så blir varje representation ett betydelsefullt bidrag till den samlade bilden av begreppet. Det är just på grund av ställningstagandet att principen om att barnens resonemang om representationer sätts över principen om mål att nå i varje cykel, som modellen med de tre designprinciperna fungerar.

Den pedagogiska modellen är ett resultat av pedagogisk designforskning, det vill säga ett systematiskt samarbete mellan forskning och praktik. Utmärkande för pedagogisk designforskning är att den bidrar till teoretisk förståelse och insatser som löser problem i praktiken (McKenney & Reeves, 2012). Principen om explicit undervisning, som den är formulerad i den traditionella CRA-modellen med läraren som modell för hur en problemlösningsprocess ska gå till, ligger långt från rådande matematikdidaktiska perspektiv som ofta bygger på hög grad av undersökning och överlag är mer elevcentrerad (Anderson, Greeno, Reder & Simon, 2000). Ett resultat av föreliggande studie visar att det går att förena strukturerad, explicit undervisning med mer matematikdidaktiska aspekter såsom resonemang och problemlösning. Den undervisningsmodell som denna studie resulterat i är explicit och strukturerad med aktiviteter som är genomtänkta, både hur de passar in i en sekvens och hur de ska fungera enskilt. Men varje aktivitet bygger samtidigt på interaktion mellan lärare och barn och en hög grad av undersökande och kollektiva resonemang där barnen fungerar som resurser för varandra. Nyckeln till att integrera dessa två aspekter med varandra ligger i synen på lärarrollen, hur matematikinnehållet förstås som polysemiskt och hur barns kollektiva resonemang fungerar som en mekanism för lärande. Det bör noteras att utprövningen av det matematiska pedagogiska programmet inte är en metodutprövning av det specifika programmet i sig, utan av kollektivt arbete med tal, resonemang och representationer i förskoleklass. Sammanfattningsvis har resultaten visat att denna typ av undervisning i förskoleklass ger effekt på barns matematiska förmågor i åk 1.

Begränsningar

En begränsning i studie I är att klassrumsundervisningen inte har dokumenterats genom videoupptagning, vilket hade kunnat ge djupare kunskap om interaktionsprocesser mellan lärare och barn, och mellan barn. Det hade också kunna ge intressant kunskap om barns resonemang om representationer. För att bättre förstå lärarnas matematiska diskussioner, dilemman och frågor om undervisningen, hade videoupptagning kunnat vara värdefull även i det sammanhanget. Båda dessa begränsningar har till viss del kompenserats av förskoleklasslärarnas ofta tjocka beskrivningar av undervisningen i text och bild och med stöd av barnens teckningar, projektledarens klassrumsbesök och fältanteckningar från seminarierna.

En begränsning i Studie II är att det inte ingår något test på läsförståelse vid pretestet. Det beror på att barnen vid den tidpunkten inte hade fått någon formell undervisning i läsning, och många av dem kunde ännu inte läsa. Ett test i språklig förståelse inkluderades dock, vilket möjliggjorde kontroll för eventuella initiala språkliga skillnader mellan grupperna. På grund av tidsbegränsning deltog endast hälften av barnen i detta test. En annan begränsning är urvalsförfarandet med klustring på klassnivå. Klustring av samplet var nödvändigt eftersom interventionen implementerades i barngrupperna av ordinarie förskoleklasslärare på sådant sätt att undervisningen ingick som en del av de dagliga aktiviteterna. Ett första steg för att möta detta problem var att dubblera antalet grupper och individer som ingick i studien, i förhållande till poweranalysens rekommendation. Ett randomiseringsförfarande gjordes i ett andra steg så att hälften av barnen slumpmässigt valdes till att medverka i studien. En tredje åtgärd var att använda analysen Complex i Mplus, för att ta hänsyn till klusterurvalet. Vidare hade en kontrollgrupp som inte erhöll någon intervention varken i språk eller i matematik kunnat bidra till en djupare förståelse av studiens resultat.

Implikationer

Denna design är ett resultat av ett samarbete mellan förskoleklasslärare och deras elevgrupper och forskare. Effekter av interventionen har utvärderats genom posttest och uppföljningstest och genom jämförelse av experimentgruppens framsteg med den aktiva kontrollgruppens framsteg. Det skulle vara intressant för framtida designarbete och forskning att undersöka i vilken mening denna studies designprinciper kan överföras till andra kontexter, andra områden av matematik eller andra åldersgrupper.

Forskning om interaktionsmönster mellan barn och lärare och mellan barn, samt mönster i barns sätt att resonera, kan bidra till djupare förståelse för sambanden mellan undervisning och lärande. Det vore också av intresse för framtida forskning att jämföra tre typer av interventionsstudier: en som bygger på design med renodlad strukturerad, explicit undervisning enligt CRA-modellen, en matematikdidaktisk studie och en tredje studie som är en kombination av de båda.

Summary

In this project, two studies have been conducted. The purpose of the first study was to design and field-test an intervention program intended for Swedish preschool teaching in the domain of number. The program is based on structured instruction design, a concrete-representational-abstract teaching sequence and children's and teachers' collective reasoning about representations. It was field-tested in cooperation with preschool-class teachers and their pupils within the pedagogical design-research paradigm (McKenney & Reeves, 2012). This part of the project is briefly reported in Study I below. The implementation and the overall effects of the intervention are measured on the level of children's learning by means of a cluster-randomized control study reported in Study II.

There is strong international evidence regarding the relationship between children's preschool math skills at school-entry and their later performance in mathematics at the end of compulsory school (Duncan, et al., 2007). There are also findings indicating that children who start school with a weak knowledge of mathematics tend to experience further mathematical difficulties (Jordan et al., 2007; Morgan, Farcas & Wu, 2009). On the other hand, promising results indicate that preschool education can provide a firm foundation for later learning (e.g. Jordan et al., 2007; Melhuish et al., 2008). Previous research has shown that the connection between informal and formal mathematics and between non-symbolic and symbolic skills relates to a critical phase in children's number-sense development. (e.g. Baroody et al., 2009a; Jordan, 2007; Purpura et al., 2013; Ramani & Siegler, 2008). In Sweden, preschool class has a unique position within the education system as it bridges between the informal learning that dominates in preschool, and the more formal learning which follows in school. Preschool class is non-obligatory but in about 95 - 96 percent of six year old children participate. This makes preschool class a potential arena for giving children opportunities to develop skills in mathematics, to prevent mathematical difficulties and remove barriers for learning.

There is no consensus of the definition of the concept of number sense (Berch, 2005; Aunio & Räsänen, 2015). However, researchers seem mainly to agree on certain critical areas that are involved: counting and counting principles; number combinations and number patterns; non-verbal and verbal addition and subtraction word-problems solutions; number knowledge including use of the number line. A review of intervention studies by Gersten et al. (2005) as well as the meta-analysis by Gersten et al. (2009) suggest that the most effective high quality instructional design for struggling learners would be both systematic and explicit. When designing a set of activities for an intervention, it is important to ensure that each concept is thoroughly covered and that each child experiences a range of particular activities. Several influential frameworks have also been published, describing mathematical knowledge as the interaction between different abilities such as reasoning, representation, problem solving, communicating and connecting (e.g. Cross, Woods & Schweingruber, 2009; National Council of Teachers Mathematics (NCTM) standards, 2000). These frameworks emphasize that it is the development of these complex skills that should be emphasized in teaching and learning mathematics.

The theory of the *central conceptual structure for whole numbers* (Okamotó & Case, 1996; Griffin, 2003; 2007) includes two major schemas as the precursors to number-sense development. In the global quantity schema, children make decisions about and discriminations between concepts such as "more or less", "longer or shorter" etcetera, while the construct of an initial counting schema allows children to count and respond to the question of *how many*. These competencies seem to develop in parallel. "It is as though the two sets of knowledge are stored in different 'files' on a computer and the two files cannot as yet be 'merged' " (Case, 1996 p 6). The structures become more integrated as children learn that symbols and operational signs represent numbers and number operations. As a result of experience-based developmental processes, the two structures integrate and a new conceptual structure, the mental number line, emerges (Okamoto & Case, 1996; Siegler & Booth, 2004). With practice, these components begin to interact as the child performs mathematical operations, serving as essential tools for mathematical thinking and reasoning. Consistent with the non-linear view of Okamotó and Case (1996), a basic tenet in the design of the present study is that mathematical objects and, in particular, the concept of number are naturally polysemic (Winsløv, 2004), meaning that for any mathematical object, there are multiple representations.

Study I

The aim of the first study was to design and field test a mathematical pedagogical program in preschool class built on structured instruction design, a concrete-representational-abstract learning pattern and children's collective reasoning. The program that is designed for collective work in class, pair-work and individual work is theoretically based on Vytgotsky's theory (1978; 1934/2012; 2004) with the support of empirical studies (Brooks, 2005; 2009). The program has been tried out in four iterative cycles in cooperation with 26 preschool teachers and their classes. In each iterative phase, new teachers have been recruited. McKenney and Reeves (2012) argue that educational design research is based on five intertwined design principles. They are *iterative; collaborative; interventionist theoretically oriented* and *responsively grounded*. The present study adheres to these five principles. It is *iterative* since the design and its implementation have been field-tested and developed over four feedback cycles. It is *collaborative* since researchers and practitioners contributed both to the design, evaluation, development and theorizing of the result. The obtained theoretical principles are implemented through a teacher's handbook, available for preschool teachers and this makes the work distinctively *interventionist*. It is *theoretically orientated* since three initial design principles that built on different areas of research and theory, were embodied in a specific teaching sequence presented in the teacher's handbook. The actual teacher instructions – as well as the grounding principles changed as a result of how the principles were *responsively grounded* through several cycles of field-testing, and additional consulting with the literature.

Three theoretical design principles underlie the design and implementation of the mathematical pedagogical program. The first design principle is that children should be provided with a structured sequence of activities, shown to be particularly effective for children at risk for mathematical difficulties (Gersten et al, 2009). The activities are grouped in five themes based on previous research on number-sense development: *sorting, classifying and patterns;*

numbers, counting and patterns; part-part-whole; number line and *grouping and place value*.

The second principle concerns a modified form of the *Concrete – Representational – Abstract* (CRA) model (Witzel, et al., 2003).

The third principle involves using children's reasoning about their work and about their drawings of their work as the main vehicle for learning (Brooks, 2005; 2009). To make the design principles into a teachable program, a "teacher's guide" was developed (Sterner et al., 2014). The collaboration with the teachers in the four cycles resulted in refinement, depth of knowledge and improvement of the program.

Study II

The aims of the second study were
1) to examine the effect of a mathematical intervention at the immediate post-test and at the follow-up test one year later, and
2) to examine if visual and verbal working memory and grammatical language comprehension at the pre-test could predict mathematical skills at the immediate post-test and the follow-up test one year later.

A longitudinal randomized number-sense intervention program including pre-, post- and follow-up tests was conducted in preschool class. The total sample included 124 children, of whom 62 were allocated to the experimental group and 62 to the control group. Based on the mathematical, pedagogical program described above, a structured and explicit 30-minutes' daily ten-week program focusing on numbers and collective reasoning about representations was conducted (Sterner et al., 2014). The control group received 30 minutes of daily phonological awareness instruction for ten weeks using a theoretically well-established program (Lundberg, Frost & Petersen, 1988). The phonological awareness program is widely used in Sweden (Lundberg, 2007). Both interventions were conducted by the children's regular teachers and both the experimental group and the control group participated in the ordinary activities in mathematics and phonological awareness offered by their schools. The teachers in the experimental group participated in workshops and seminars that were conducted over a period of eight months. All teachers had earlier participated in professional development with respect to the phonological awareness program that was conducted with the control group.

To examine the effect of the mathematics intervention on later mathematical ability, a structural equation model was created. Autoregressive relationships were applied between the latent variables that indicated mathematics skills on the pre-, post- and follow-up tests, and the error variance from the identical indicators over time were co-varied. Reading comprehension was also included as a manifest outcome variable. The manifest variables measuring phonological working memory, visual working memory and linguistic comprehension were freely correlated with mathematics on the pre-test. Gender differences and possible differences in initial mathematics skills between the experimental group and the control group were controlled for. A dichotomous variable (Group) representing the control group (coded as 0) and the experimental group (coded as 1) was related to the math variables on the post- and the follow-up tests and to reading comprehension on the follow-up test.

The results show a significant intervention effect on the children's number-sense growth between the pre-test and the immediate post-test. There was also a sustained effect of the intervention nine months later when children were assessed in Grade 1. Verbal working memory exhibited on the pre-test and mathematical skills exhibited on the post-test were significantly related to reading comprehension on the follow-up test, whereas visual working memory and linguistic comprehension were not. There was a significant negative effect of group assignment on reading comprehension on the follow-up test, that is, in favor of the control group.

Discussion

Findings from the field testing confirmed that the theoretical principles behind the mathematical pedagogical program offered relevant support but they also revealed some challenges. The first testing cycle led to a more detailed description of activities with respect to exactly what objects to use to increase the possibilities for children to attend to the underlying abstract structures of the activity. The second and third testing cycle made us complete the teacher material with more detailed instructions, tools and routines for how to make the reasoning sessions more productive. Both these changes concerned the embodiment of the CRA principle and the principle of reasoning about representations respectively.

The discovery in the fourth testing cycle was of a different nature. In addition to the structured design, the program builds on sessions involving collective reasoning about children's individual representations of collectively experienced activities. It was found that the teachers saw the purposes of individual mathematical activities as learning goals that all children should reach at the same time. When this did not happen, teachers became unsure of how to proceed with subsequent activities. In our discussion with the teachers it was emphasized the teacher's role was not to make sure that all the children reached a particular goal at the end of a session. Instead, the primary role of the teachers was to make sure each child got opportunity to present their own representations of the activity, and have it and it's relation to other children's representations reasoned about in the group. In this way children's differing views and ways of expressing themselves about the activity and the concepts that were in focus in a particular session, became assets in the discussion. It was also emphasized that the relations between the mathematical themes, meant that the concepts children met were revisited several times in different mathematical contexts. In this way, even if a child's drawing started out as a concrete representation it could be reasoned about in connection with more abstract representations of other children and developed over time. Considering the critical issue of the connection between children's non-symbolic and symbolic understanding it is assumed that reasoning about children's representations and connecting them mathematically to each other could be a pedagogically successful way of handling this issue.

On the pre-test, the control group performed significantly better both on mathematics and on visual working memory. Research on the contribution of working memory to different areas of mathematics indicates that prior to school entry children rely to a great extent on analogous mental representations of quantities, which are tokens that can be manipulated and stored in visual working memory, while school-aged children to a greater extent rely on verbal working memory (Raghubar et al., 2010). This implies that visually presented problems are especially useful for children before school-entry (Rasmussen & Bisanz, 2005). In the present study, teachers and children rely heavily on reasoning using representations such as blocks, drawings, icons, numerals, number lists and oral and written language when solving math problems. It is assumed that this pedagogical approach may be a successful way to enhance number-sense development in general and when visual working memory resources are limited. The program encourages verbal reasoning while supporting visual working memory by means of acting on physical objects. In the current study, no further significant correlations between visual working memory and mathematics were found, meaning that working memory does not affect later mathematics performance beyond the effects of the mathematical intervention. On the follow up-test, nine months after the intervention, the control group outperformed the experimental group on reading comprehension, a relationship between phonological awareness teaching and learning and reading comprehension that has also been demonstrated in previous research (e.g., Fälth et al., 2013; Lundberg, 1985; Wolff, 2011). The fact that the control group's performance was superior to the experimental group on reading comprehension after the intervention period demonstrates that the mathematical intervention did not have a global effect, but rather had a specific effect, on math skills.

There was a significant effect on the children's mathematical skills as indicated on the post-test and on reading comprehension on the follow-up test. This implies that improvement in mathematics corresponds to improvement in reading comprehension. While the connection between reading and mathematics has not been the focus of this study, these results invite to some reflections. Associations between mathematics and reading have been documented in previous research (e.g., Jordan et al., 2003; Lie Reikerås, 2007). Gustafson, Yang Hansen och Rosén (2013) suggest that there is theoretical and empirical research supporting the idea that the development of literacy and numeracy skills can be influenced by literacy activities. However, Duncan et al. (2007) found that preschool math was a stronger predictor of later reading achievement than early reading was of later math achievement.

In an exploratory study Durham et al. (2007) found that kindergartners' oral language skills such as vocabulary and syntactical abilities had significant effects both on second grade reading and third grade mathematics. The design of the present study may contribute to the explanation of the predictive power of mathematics on reading comprehension. The focus on reasoning and collective work means that children practice both listening comprehension and language expression ability.

Another important component found in Duncan et al. (2007) is that attention skills are consistently related to both reading and mathematics outcomes. One explanation they give with respect to this predictive power is that attention skills increase when children are engaged in academic endeavors and learning activities. This is consistent with the results of a longitudinal study in Grades 3 and 4 (Lundberg & Sterner, 2006) that indicate a causal relationship between task orientation, and reading comprehension and arithmetic. They assume that task orientation, to some extent, is a determinant of successful learning in school and that there is a reciprocal relationship. With respect to the similarities between the mathematical and the reading intervention program and with regard to the structure of explicit instruction, teacher scaffolding and the emphasis on the children's active inclusion in their learning processes, it is reasonable to assume that the pedagogical approach has enhanced children's task orientation abilities, which, in turn, may have affected mathematical abilities and reading comprehension.

Implications

This study has demonstrated that a structured intervention focused on number and collective reasoning about representations during preschool class has significant effects on children's number-sense improvement and has sustained effects nine months later, as demonstrated when the children are in Grade 1. The current study is the first of its type carried out in the context of the Swedish school system characterized by a well-developed preschool system with clear pedagogical goals to strive for, and a preschool class functioning as a bridge between the preschool and the formal and obligatory school. The results are promising. Future research on classroom observations, teacher-children interactions and patterns of children's reasoning could contribute to a deeper understanding of the causal relationship between instruction and achievement. Related to this, it could be important to compare the present study's design principles with other evident intervention designs to determine the features that are most effective on a group level, as well as on an individual level. Furthermore, in a future study, measures of task orientation could be added to the test battery, making it possible to study the development of, and interactions between, task orientation, mathematical skills and reading comprehension.

Referenser

Adey, P., Robertson, A. & Venville, G. (2001). *Let's think! A programme for developing thinking with five and six year olds.* London: GL Assessment.

Ahlberg, A. (1995). *Att möta matematiken i förskolan. Matematiken i temaarbetet* (Rapport 1995:14*).* Institutionen för pedagogik. Göteborgs universitet.

Alibali, M. W. & DiRusso, A. A. (1999). The function of gesture in learning to count: More than keeping track. *Cognitive Development, 14,* 37-56.

Allsopp, D. H., Kyge, M. M. & Lovin, La. H. (2007). *Teaching mathematics meaningfully solutions for researching struggling learners.* Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

Anderson, J. R., Greeno, J. G., Reder, L. & Simon, H. A. (2000). Perspectives on learning, thinking, and activity. *Educational Researcher, 29*, 11-13. DOI:10.3102/0013189X029004011

Andersson, U. & Lyxell, B. (2007). Working memory deficit in children with mathematical difficulties: A general or specific deficit? *Journal of Experimental Child Psychology, 96*, 197-228. DOI:10.1016/j.jecp.2006.10.001

Aubrey, C., Dahl, S. & Godfrey, R. (2006). "Early mathematics development and later achievement: Further evidence." *Mathematics Education Research Journal, 18*, 27-46.

Aubrey, C., Ghent, K. & Kanira, E. (2012). Enhancing thinking skills in early childhood. *International Journal of Early Education, 20,* 332-348. DOI:10.1080/09669760.2012.743102

Aunio, P. (2006). *Number sense in young children - (inter)national group differences and an intervention programme for children with low and average performance*. Research report 269. Helsinki: University of Helsinki. *International Journal of Early Years Education, 12,* 195-216. DOI:10.1080/0966976042000268681

Aunio, P., Hautamäki, J. & Van Luit, J. E. H. (2005). Mathematical-thinking intervention programmes for preschool children with normal and low number sense. *European Journal of Special Needs Education, 20,* 131-146. DOI:10.1080/08856250500055578

Aunio, P. & Niemvirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences, 20,* 427-435. DOI:10.1016/j.lindif.2010.06.003

Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal, 23,* 1-21. DOI:10.1080/1350293X.2014.996424

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M-K. & Nurmi, J-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96*, 699-713. DOI:10.1037/0022-0663.96.4.699

Baddeley, A. D. (2000). Short-term and working memory. In E. Tulving & F. I. M. Craik (Eds.), *The Oxford handbook of memory* (pp. 77-92). New York: Oxford University Press.

Baddeley, A. D. (2007). *Working memory, thought and action.* Oxford: University Press.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Swafford & Findell; , W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking.* New York: Teachers College.

Baroody, A. J., Eiland, M. & Thompson, B. (2009a). Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development, 20*, 80-128. DOI:10.1080/10409280802206619

Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M-L. & Li, X. (2009b). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning, 6,* 227-260. DOI:10.1207/s15327833mtl0602_8

Berch, D. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*, 333-339.

Bishop, D. V. M. (2003). *Test for Reception of Grammar Version 2, TROG-2.Manual.* Department of Experimental Psychology University of Oxford. London: Person Inc.

Björklund, C. (2007). *Hållpunkter för lärande. Småbarns möten med matematik*. Åbo: Åbo Akademi University Press.

Björklund, C. (2008). Toddlers' opportunities to learn mathematics. *International Journal of Early Childhood, 40*, 81-95.

Bransford, J., Vye, N., Stevens, R., Kuhl, P., Schwartz, D. et al. (2006). Learning theories and education: Toward a decade of synergy. In P. Alexander & P. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 209-244). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Brooks, M. (2005). Drawing as a unique mental development tool for young children: interpersonal and intrapersonal dialogues. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*, 80-91.

Brooks, M. (2009). What Vygotsky can teach us about young children drawing. *International Art in Early Childhood Research Journal 1*, 1-12.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*, 141-178.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain.* London: Macmillan.

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*, 126-139. DOI.org/10.1108/20468251211224172

Carpenter, T. P., Dossey, J. A. & Koehler, J. L. (2004). Introduction. In T. P. Carpenter, J. A. Dossey & J. L. Koehler (Eds.), *Classics in mathematics education research* (pp. 1-6). Reston: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Case, R. & Okamoto, Y. (1996). Introduction: Reconceptualizing the nature of children's conceptual structures and their development in middle childhood. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 61*, 1-26. DOI:10.1111/1540-5834.ep12051952.

Clarke, B. &. Shinn, M. R. (2004). A Preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement. *School Psychology Review 33*, 234-48.

Clarke, B., Smolkowski, K., Baker, S., Fien, H., Doabler, C. T. & Chard, D. (2011). The Impact of a comprehensive tier 1 kindergarten curriculum on the achievement of students at-risk in mathematics. *Elementary School Journal, 111*, 561-584.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 136-163. DOI:10.2307/30034954

Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A. & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*, 127-166.

Clements, D. H., Sarama, J., Wolfe, B. B. & Spitler, M. E. (2013). Longitudinal evaluation of a scale-up model for teaching mathematics with trajectories and technologies: persistence of effects in the third year. *American Educational Research Journal, 50,* 812-850. DOI:10.3102/0002831212469270

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*, 9-13. DOI:10.3102/0013189X032001009

Conway, A.R.A., Moore, A.B. & Kane, M.J. (2009). Recent trends in the cognitive neuroscience of working memory. *Cortex, 45*, 262-268.

Cross, C. T., Woods, T. A. & Schweingruber, H. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington: The National Academic Press.

Dantzig, T. (2007). *Number the language of science*. London: Penguin Books Ltd. (Originalutgåva, 1954).

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44,* 1-42.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & Language, 16*, 16-36. DOI.org/10.1111/1468-0017.00154

Dehaene, S. (2011). *The number sense: how the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press. (Originalutgåva, 1997).

DeLoache, J. S. (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child Development, 71*, 329-338. DOI:10.1111/1467-8624.00148

Desoete, A., Stock, P., Schepens, A., Baeyens, D. & Roeyers, H. (2009). Classification, seriation, and counting in Grades 1, 2, and 3 as two-year longitudinal predictors for low achieving in numerical facility and arithmetical achievement? *Journal of Psychoeducational Assessment 27,* 252-264. DOI:10.1177/0734282908330588

Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerdt, F. & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology, 82*, 64-8. DOI:10.1348/2044-8279.002002

Devlin, K. (2000). *The math gene, how mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip.* Great Britain: Weidenfeld & Nicolson.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2000). To develop young children's conception of numbers. *Early Childhood Development and Care, 162*, 81-107.

Duncan, G. J., Claessens, A., Huston, A. C., Pagani, L. S., Engel, M. et al. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology, 43*, 1428-1446. DOI:10.1037/0012-1649.43.6.1428

Durham, R. E., Farkas, G., Scheffner Hammer, C., Tomblin, J. B. & Catts, H. W. (2007).Kindergarten oral language skill: A key variable in the intergenerational transmission of socioeconomic status. *Research in Social Stratification and Mobility, 25,* 294-305. DOI:10.1016/j.rssm.2007.03.001

Dyson, N. I., Jordan, N. C. & Glutting, J. (2011). A number sense intervention for low-income kindergartners at risk for mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities 46,* 166-181. DOI:10.1177/0022219411410233

Dysthe, O. (1996). *Det flerstämmiga klassrummet.* Lund: Studentlitteratur.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences, 11,* 105-121. DOI:10.1207/S15327809JLS1101_4

Farrell Pagulayan, K., Busch, R. M., Medina, K., Bartok, J. & Krikorian, R. (2006) Developmental normative data for the Corsi block-tapping task. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology, 28,* 1043-1052. DOI:10.1080/13803390500350977

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*, 307-314. DOI:10.1016/j.tics.2004.05.002

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 361-372.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (2009). Avoiding misinterpretations of Piaget and Vygotsky: Mathematical teaching without learning, learning without teaching, or helpful learning-path teaching? *Cognitive Development, 24*, 343-361. DOI:10.1016/j.cogdev.2009.09.009

Fälth, L., Gustafson, S., Tjus, T., Heimann, M. & Svensson, I. (2013). Computer-assisted interventions targeting reading skills of children with reading disabilities - A longitudinal study. *Dyslexia. 19*, 37-53. DOI:10.1002/dys.1450

Gathercole, S. E. & Alloway, T. P. (2008). *Working memory and learning: a practical guide for teachers.* London: SAGE Publication.

Geary, D. C. (1991). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 4-15.

Geary, D. C. (2003). Learning disabilities in arithmetic: Problem solving differences and cognitive deficits. In H. L. Swanson, K. Harris & S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 199-212). New York: Guilford.

Geary, D. C. (2010). Mathematical disabilities: Reflections on cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Learning and Individual Differences, 20*, 130-133. DOI:10.1016/j.lindif.2009.10.008

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A five-year longitudinal study. *Developmental Psychology, 47,* 1539-1552. DOI:10.1037/aoo25510

Geary, D. C., Hamson, C. O. & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 77*, 236-263. DOI:10.1006/jecp.2000.2561

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L. & Numtee, N. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development, 78,* 1343 - 1359. DOI:10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Bailey, D. H. (2013). Adolescents' functional numeracy is predicted by their school entry number system knowledge. *PLOS ONE, 8,* 1-7. DOI:10.1016/j.tics.2004.05.002

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press

Gersten, R., Jordan, N. C. & Flojo, J. R. (2005). Early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*, 293-304.

Gersten, R., Chard. J. C., Jayanthi, M., Baker, S., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A Meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79*, 1202–1242 DOI: 10.3102/003465430933443

Ginsburg, H. P. (1975). Young children's informal knowledge of mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1,* 63-156.

Ginsburg, H. P., Lee, J. S. & Stevenson Boyd, J. (2008). Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report, 22*, 3-22.

Gray, E. M. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 115-141.

Griffin, S. (2003). Number worlds: A research-based mathematics program for young children. In D. H. Clements, J. Sarama & A-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics* (pp. 325-342). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Griffin, S. (2004). Teaching number sense. *Educational Leadership, 61*, 39-42.

Griffins, S. (2005). Fostering the development of whole number sense: Teaching mathematics in primary grades. In J. Bransford & S. Donovan (Eds.), *How student learn: A targeted report for teachers* (pp. 250-302). Washington: National Academic Press.

Griffin, S. (2007). Early intervention for children at risk of developing mathematical learning disabilities. In D. B. Berch & M. M.M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children?* (pp. 373-396). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

Gustafson, J-E. (2011). Strukturella ekvationsmodeller. I G. Djurfeldt & M. Barmark (Red.), *Statistisk verktygslåda - multivariat analys* (s. 269-321). Lund: Studentlitteratur.

Gustafson, J-E. & Stahl, P. A. (2005). *STREAMS 3.0 User's Guide*. Mölndal, Sweden: MultivariateWare.

Gustafson, J-E., Yang Hansen, K. & Rosén, M. (2013). Effects of home background on student achievement in reading, mathematics, and science at the fourth Grade. In M.O. Martin & I. V. S. Mullis (Eds.), *TIMSS and PIRLS 2011: Relationships among reading, mathematics, and science achievement at the fourth grade – implications for early learning* (pp. 181-287). Chestnut Hill: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Haidera, H., Eichler, A., Hansen, S., Vaterrodt, B., Gaschler, R., Frensch, P. A. (2014).How we use what we learn in math: An integrative account of the development of commutativity. *Frontline Learning Research 2,* 1-21. DOI.org/10.14786/flr.v2i1.37

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Swafford & Findell; ., W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 5-23). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hu, L. & Bentler, P (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: conventional criteria versus new alternatives. *Structure Equation modelling, 6*, 1–55.

Häggström, J. (2014). Different opportunities to learn: the case of simultaneous equations. In F. K. S Leung, K. Park, D. Holton & D. Clarke (Eds.), *Algebra teaching around the world* (pp. 233-242). Rotterdam: Sense Publishers.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1999). *The early growth of logic in the child.* UK: Routledge. (Originalutgåva 1964).

Johnsen Høines, M. (2000). *Matematik som språk: verksamhetsteoretiska perspektiv*. Stockholm: Liber.

Jordan, N. C. (2007). The need for number sense. The roots of many students' math difficulties are evident as early as kindergarten. *Educational Leadership, 65*, 63-66.

Jordan N. C., Huttenlocher, J. & Levine, S. C. (1992). Differential calculation abilities in young children from middle- and low-income families. *Developmental Psychology, 28*, 644-653.

Jordan, N. C., Hanich, L. B. & Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children. A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*, 103-119. DOI:10.1016/S0022-0965(03)00032-8

Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. N. & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development, 77*, 153-175. DOI:10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N. & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research and Practice, 22,* 36-46. DOI.org/10.1111/j.1540-5826.2007.00229.x

Jordan, N. C. & Levine, S. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews, 15*, 60-68. DOI:10.1002/ddrr.46

Jordan, N. C., Glutting, J. & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences, 20*, 82-88. DOI:10.1016/j.lindif.2009.07.004

Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B. & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: A randomized controlled study. *Journal of Educational Psychology*, *104,* 647-660. DOI:10.1037/a0029018

Jung, M., Hartman, P., Smith, T. & Wallace, S. (2013). The effectiveness of teaching number relationships in preschool. *International Journal of Instruction, 6,* 165-177.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers* (Doctoral thesis). Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothenburgensis.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: Macmillan.

Kilpatrick J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington: National Academy Press.

Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M. & Hedges, L.V. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: the effect of teacher "math talk". *Developmental Psychology, 42*, 59-69. DOI:10.1037/0012-1649.42.1.59

Klingberg, T. (2011). *Den lärande hjärnan.* Stockholm: Natur & Kultur.

Kolkman, M. J., Kroesberger, E. H. & Leseman, P. PM. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction, 25*, 95-103. DOI:http://dx.DOI:10.1016/j.learninstruc.2012.12.001

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009a). Exploring the impact of phonological awareness, visual-spatial working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 516-531. Doi:org/10.1016/jecp.2009.03.009

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009b). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction, 19*, 513-526. DOI:10.1016/j.learninstruc.2008.10.002

Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H. & Aunio, P. (2012). Mathematical and cognitive predictors of the development of mathematics. *British Journal of Educational Psychology (2012), 82,* 24-27.

Kyttälä, M., Aunio, P. & Hautamäki, J. (2010). Working memory resources in young children with mathematical difficulties. *Scandinvian Journal of Psychology, 51,* 1-5. DOI:101111/j.1467-9450.2009.00736.x

Kyttälä, M., Aunio, P., Lepola, J. & Hautamäki, J. (2014). The role of working memory and language skills in the prediction of word problem solving in 4- to 7-year-old children. *Educational Psychology, 34,* 674-696. DOI:10.1080/01443410.2013.814192

Lerkkanen, M-K., Rasku-Puttonen, H., Aunola, K. & Nurmi, J-E. (2005). Mathematical performance predicts progress in reading comprehension among 7-year olds. *European Journal of Psychology of Education, 2*, 121-131.

Levine, S. C., Jordan, N. C. & Huttenlocher, J. (1992). Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 53,* 72-103.

Lie Reikerås, E. K. (2007). *Aspects of arithmetical performance related to reading performance: a comparison of children with different levels of achievement in mathematics and reading different age levels*. PhD thesis. Stavanger: University of Stavanger.

Liljedahl, P., Chernoff, E. & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. *Journal of Math Teacher Education, 10*, 239-249. DOI:10.1007/s10857-007-9047-7

Link, T., Huber, S., Nuerk, H-C. & Moeller, K. (2013). Unbounding the mental number line new evidence on children's spatial representation of numbers. *Frontiers in psychology, 4*, 1-12. DOI:10.3389/fpsyg.2013.01021

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 255-276. DOI:10.1007/s10649-007-9104-2

Locuniak, M. N. & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities, 41,* 451-459. DOI:10.1177/0022219408321126

Lundberg, I. (1985). Longitudinal studies of reading and writing difficulties in Sweden. In G. E. McKinnon & T. G. Waller (Eds.), *Reading research: Advances in theory and practice* (pp. 65-105). New York: Academic Press.

Lundberg, I., Frost, J. & Petersen, O-P. (1988). Effects of an extensive program for stimulating phonological awareness in preschool children. *Reading Research Quarterly, 23,* 263-284. DOI:10.1598/RRQ.23.3.1

Lundberg, I. (2007). *Bornholmsmodellen: vägen till läsning: språklekar i förskoleklass.* Stockholm: Natur och Kultur.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*, 2-8.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).

McKenney, S. & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. New York: Routledge.

McKenzie, B., Bull, R. & Gray, C. (2003). The effects of phonological and visuo-spatial interference on children's arithmetical performance. *Educational and Child Psychology, 20,* 93-108.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet.* Rud: NKI-forlaget.

Melhuish, E. C., Sylva, K., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I.& Taggart, B., (2008). Preschool influences on mathematics achievement. *Science, 321*, 1161-1162. DOI:10.1126/science.1158808

Mononen, R., Aunio, P., Koponen, T. & Aro, M. (2014). A review of early numeracy interventions for children at risk in mathematics. *International Journal of Early Childhood Special Education, 6,* 25-54.

Morgan, P.L., Farkas, G. & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten Children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities, 42*, 306-321. DOI:10.1177/0022219408331037

Moschkovich, M. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning, 4,* 189-212. DOI:10.1207/S15327833MTL04023_5

Moseley, B. (2005). Pre-service early childhood educators' perceptions of math-mediated language. *Early Education & Development, 3,* 387-398. DOI:org/10.1207/s15566935eed1603_5

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*, 33-49.

Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children's difficulties in mathematics learning. *Australian Journal of Learning Difficulties, 16,* 19-39. DOI:10.1080/19404158.2011.563476

Muthén, L. K. & Muthén, B. O. (2012). *Mplus User's Guide. Statistical Analysis with Latent Variables. Version 7*. Los Angeles: Muthén & Muthén.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington: Department of Education.

Navarro, J. I., Aguilar, M., Marchena, E., Ruiz, G. & Menacho, I. (2012). Longitudinal study of low and high achievers in early math. *British Journal of Educational Psychology, 82*, 28-41. DOI:10.1111/j.2044-8279.2011.02043.x

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Liber.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nomad, 18,* 3-46.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.). *Proceedings of the third mediterranean conference on mathematics education* (pp. 115-124). Athens, Hellenic Republic: Greek Mathematical Society

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D. Bell, D. Gardner, S. et al. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology, 25,* 147-166. DOI:10.1348/026151006X153127

Nunes, T., Bryant, P., Barros, R. & Sylva, K. (2011). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology*, *82*, 136-156. DOI:10.1111/j.2044-8279.2011.02033.x

Okamoto, Y. & Case, R. (1996). Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 61,* 27-59. DOI:10.1111/1540-5834.ep12051961.

Ostad, S. (1999). *Mathematical difficulties. Studies of learner characteristics in developmental perspective*. Oslo: Department of Special Needs Education. Faculty of Education, University of Oslo.

Ostad, S. (2002). Matematikkvansker i et longitudinelt perspektiv. I T. Dalvang, J. Formo, O. Lunde & O. Bekken (Eds.) *"En matematikk for alle i en skole for alle". Rapport fra det 1. nordiske forskerseminar om matematikkvansker*. Kristiansand: Info Vest Forlag.

Ostad, S. A. & Sorensen, P. M. (2007). Private speech and strategy-use patterns bidirectional comparisons of children with and without mathematical difficulties in a developmental perspective. *Journal of Learning Disabilities, 40,* 2-14.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-More than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom, 12*, 8-13.

Papic, M. M., Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C, (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42,* 237-268.

Pareja Roblin, N. N., Ormel, B. J. B., McKenney, S. E., Voogt, J. M. & Pieters, J. M. (2014). Linking research and practice through teacher communities: a place where formal and practical knowledge meet? *European Journal of Teacher Education, 37,* 183-203. DOI:10.1080/02619768.2014.882312

Passolunghi, M. C. & Lanfranchi, S. (2012). Domain-specific and domain-general precursors of mathematical achievement: A longitudinal study from kindergarten to first grade. *British Journal of Educational Psychology, 82*, 42-63. DOI:10.1111/j.2044-8279.2011.02039.x

Piaget, J. (2001). *The psychology of intelligence.* London: Routledge. (Originalutgåva, 1926).

Praet, M. & Desoete, A. (2014). Enhancing young children's arithmetic skills through non-intensive, computerised kindergarten interventions: A randomised controlled study. *Teaching and Teacher Education, 39*, 56-65. DOI.org/10.1016/j.tate.2013.12.003

Pruden, S. M., Levine, S. C. & Huttenlocher, J. (2011) Children's spatial thinking: Does talk about the spatial world matter? *Developmental Science, 14*, 1417-1430. DOI:10.1111/j.1467-7687.2011.01088.x

Purpura, D. J., Baroody, A. J. & Lonigan, C. J. (2013). The transition from informal to formal mathematical knowledge: Mediation by numeral knowledge. *Journal of Educational Psychology, 105*, 453-464. DOI:10.1037/a0031753

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30,* 2-7.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26,* 257-277. DOI 10.1007/s13394-013-0087-2

Raghubar, K. P., Barnes, M. A. & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences, 20,* 110-122. DOI:10.1016/j.lindif.2009.10.005

Ramani, G B. & Siegler R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development, 79*, 375-394. DOI:10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x

Rasmussen, C. & Bisanz C. (2005). Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology 91,* 137-157. DOI:10.1016/j.jecp.2005.01.004

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). East Sussex, UK: Psychology Press.

Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A., Aunio, P. & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development, 24*, 450-472. DOI:10.1016/j.cogdev.2009.09.003

Sarama, J. & Clements, H. C. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Schopman, E. A. M., Van Luit, J. E. H. & Van de Rijt, B. A. M. (1996). Learning and transfer of preparatory arithmetic strategies among young children with developmental lag. *Journal of Cognitive Education, 5*, 117-131.

Sfard, A. & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what growun-ups cannot se as different?: Erly numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction, 23,* 237-309.

Shrager, J. & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science, 9,* 405-410.

Siegler, R. S. & Booth, J. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*, 428-444. DOI:10.1111/j.1467-7687.2008.00714.x

Siegler, R. S. & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science 11*, 655-661.

Siegler, R. S., Fazio, L. K. & Pyke, A. (2011). There's nothing so practical as a good theory. In J. Mestre & B. Ross (Eds.), *Psychology of Learning and Motivation, 55* (pp. 171-197). Oxford: Elsevier.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145. DOI:10.2307/749205

Skolverket (2010). *Läroplan för förskolan Lpfö 98. Reviderad 2010*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmen*. Stockholm: Fritzes kundservice.

Skolverket (2011b). *Förskoleklassen är till för ditt barn*. Stockholm: Fritzes kundservice.

Skolverket (2011c). *Diskussionsunderlag för förskoleklassen, ett diskussionsunderlag för lärare i förskoleklass*. http://www.skolverket.se/publikationer?id=2602

Skolverket (2013). *Nationella prov i årskurs 3 våren 2013*. www.skolverket.se/statistik & utvärdering

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly 19*, 59-81.

Steiger, J.H. (2007), "Understanding the limitations of global fit assessment in structural equation modeling." *Personality and Individual Differences, 42*, 893-98. Doi:10.1016/j.paid.2006.09.017

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340. DOI:10.1080/10986060802229675

Sterner, G., Helenius, O. & Wallby, K. (2014). *Tänka, resonera och räkna i förskoleklassen.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM).

Sterner, G., Wolff, U. & Helenius, O. *Reasoning about representations: effects of an early math intervention.* Manuscript submitted for publication.

Sterner, G. & Helenius, O. (2015). Number by reasoning and representations – the design and theory of an intervention program for preschool class in Sweden. In O. Helenius, A. Engström, T. Meaney, P. Nilsson, E. Norén et al. (Eds), *Development of mathematics teaching: design, scale, effects. Proceedings from MADIF9: The ninth Swedish mathematics education research seminar, Umeå, February 4-5, 2014*. Linköping: SMDF.

Sylke, W. M., Toll, S. W. M. & Van Luit, J. E. H. (2012). Early numeracy intervention for low-performing kindergartners. *Journal of Early Intervention, 34*, 243-264. DOI.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.003

Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap. Om lärprocesser och det kollektiva minnet.* Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag.

Toll, S. W. M. & Van Luit, J. E. H. (2012). Effects of remedial numeracy instruction throughout kindergarten starting at different ages: Evidence from a large-scale longitudinal study. *Learning and Instruction, 33*, 39-49. DOI.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.003

Utbildningsdepartementet (2010). *Förskola i utveckling - bakgrund till ändringar i förskolans läroplan.* http://www.regeringen.se

van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. van den Akker, R. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Eds.), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1-14). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van de Ritj, B., Godfrey, R., Ubrey, C., Van Luit, E. H., Ghesquière, P. et al. (2003). The development of early numeracy in Europe. *Journal of Early Childhood Research, 1,* 155-180. DOI:10.1177/1476718X030012002

Van Luit, J. E. H. & Van de Rijt, B. A. M. (2005). *Early numeracy test.* Doetinchem, The Netherlands: Graviant.

Van Oers, B. & Poland, M. (2007). Schematizing activities as a mean for encouraging young children to think abstractly. *Mathematics Education Research Journal, 19*, 10-22.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society the development of higher psychological processes.* Cambridge: Harvard University press.

Vygotsky, L. S. (2004). Imagination and creativity in childhood. *Journal of Russian and East European Psychology, 42,* 7-97.

Vygotsky, L. S. (2012). *Thought and language.* Cambridge: The MIT Press. (Originalutgåva, 1934).

Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S. & Davis-Kean, P. E. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher, 43*, 352-360. DOI:10.3102/0013189X14553660

Wiese, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: the role of language. *TRENDS in Cognitive Sciences, 7,* 385-390. DOI:10.1016/S1364-6613(03)00192-X

Winsløv, C. (2004). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 2,* 81-100.

Witzel, B. S., Mercer, C. D. & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*, 121-131. DOI:10.1111/1540-5826.00068

Wolff, U. (2011). Effects of a randomised reading intervention study: An application of structural equation modelling. *Dyslexia, 17*, 295-311.

Wolff, U. (2013). MiniDUVAN. *Kartläggning av fonologisk förmåga hos barn mellan 4 och 6 år*. [Assessment of phonological skills in children 4–6 years old]. Stockholm: Hogrefe Psykologiförlaget.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477. DOI:10.2307/749877

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236) Reston: National Council of Teachers of Mathematics.